Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci.

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 28. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese *kms@kms.sk*, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti slovenských stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si vypočítaš ako $k_\alpha = r + u + m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3 - 7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa budú zostavovať štyri regionálne výsledkové listiny a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko a Bratislava. Na záverečné sústredenie bude pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu, ďalších 5 s najlepším bodovým ziskom celkovo a vybraní riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Ak sa niekomu podarí splniť podmienky pre účasť na sústredení ALFY aj BETY v tom istom semestri, bude pozvaný na sústredenie BETY a na sústredenie ALFY bude namiesto neho pozvaný ďalší v poradí.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií sú v tomto letáku a ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.
Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, a preto nebudú opravené.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na *kms@kms.sk*, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase $9^{00} - 14^{00}$. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.maklub.tk`.

Výlety

Pre všetkých prírodychtivých sa pokúsime zorganizovať aj niekoľko výletov. Aktuálne informácie o cestách do prírody možno nájsť na našej internetovej stránke `www.kms.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2006/2007 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda .... so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo .... úspešných.
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil(vlastný): .... e-mail: ....

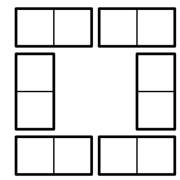
Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

<u>Úloha č. 1:</u>
Na plote sedia vrabce a holuby. Keď päť vrabcov odletí, na plote ostanú na každého vrabca dva holuby. Ak potom odletí ešte aj 25 holubov, ostanú na každého holuba tri vrabce. Nájdite pôvodný počet vrabcov a holubov.

<u>Úloha č. 2:</u>
Na stole je položených šesť kusov domina tak ako na obrázku. Aký je najmenší možný počet bodiek na týchto domínách?
Poznámka: Na každej polovici domina je umiestnených 0 až 6 bodiek, pričom na dvoch poloviciach toho istého kusu domina môžu byť aj rôzne počty bodiek. Každá sada domina obsahuje každý prípustný kúsok práve raz, to znamená, že obsahuje 28 kúskov domina.



<u>Úloha č. 3:</u>
Keď bol Foto malý, dostal na vianoce daváť kociek, na ktorých boli čísla $1, 2, \ldots, 9$. (Na každej kocke jedno, každé číslo na práve jednej.) Rúža bol vtedy ešte menší a preto kocku s číslom 8 zjedol. Fotovi neostalo nič iné, iba zo zvyšných kociek vytvárať dvojciferné prvočísla, vždy štyri naraz. Keď ich vytvoril, zapísal ich súčet voskovkou na stenu. Hral sa takto už asi pol dňa, keď si uvedomil, že je hladný a že už vytvoril všetky možné štvorice prvočísel. Zistite, aké čísla boli na stene napísané, keď sa Foto odišiel najesť.
Poznámka: Rúža sa najesť neodišiel, pretože ráno zjedol kocku.

<u>Úloha č. 4:</u>
Na vybratie vhodného šéfa KMS bola zostavená komisia pozostavajúca z deviatich členov. Mali vybrať z troch kandidátov. Volili nasledovným spôsobom: Každý člen komisie si zostaví poradie kandidátov, prvému dá tri body, druhému dva body a poslednému jeden bod. Keď boli body sčítané, zistilo sa, že každý kandidát získal iný počet bodov a teda poradie bolo jasne určené. Jeden člen komisie si však všimol, že keby každý člen komisie vybral iba jedného kandidáta, konečné poradie by bolo presne opačné. Koľko bodov získali jednotliví kandidáti?

<u>Úloha č. 5:</u>
a) Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $2^n - 1$ aj $2^n + 1$ sú prvočísla.
b) Nájdite všetky prvočísla p také, že $4p^2 + 1$ aj $6p^2 + 1$ sú prvočísla.

<u>Úloha č. 6:</u>
Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n + 200$ aj $n - 269$ sú tretie mocniny prirodzených čísel.

<u>Úloha č. 7:</u>
Na sústredení bolo 33 účastníkov. Každý účastník pravdivo odpovedal na dve otázky: „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým krstným menom ako ty?“ a „Koľko je na sústredení iných účastníkov s rovnakým priezviskom ako ty?“. Medzi odpoveďami sa každé z čísel 0 až 10 vyskytovalo aspoň raz. Ukážte, že na sústredení museli byť dvaja účastníci s rovnakým krstným menom aj priezviskom.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

<u>Úloha č. 8:</u>
V zástupe je $2n$ bielych a $2n$ čiernych lôpt. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sú usporiadané, je vždy možné nájsť $2n$ za sebou idúcich lôpt, z ktorých práve n je bielych.

<u>Úloha č. 9:</u>
Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z také, že platí

$$2^x + 3^y = z^2.$$

<u>Úloha č. 10:</u>
Numizmatik Kristián Príslovka má 241 mincí s celkovou hodnotou 360 toliarov. (Hodnota každej mince v toliaroch je prirodzené číslo.) Môže si byť Kristián Príslovka istý, že vie tieto svoje mince rozdeliť na tri kôpky s rovnakou hodnotou?

Úloha č. 11:
Na ostrove žije n domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.
a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz? (Tento pocet kamienkov musí byt dostatocný, nech už sú vztahy na ostrove akékolvek.)

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech T je stred kružnice opísanej trojuholníku AOC. Bod M je stredom strany AC. Body D a E ležia po rade na priamkach AB a CB tak, že uhly MDB a MEB sú rovnako veľké ako uhol ABC. Dokážte, že priamky BT a DE sú na seba kolmé.

Úloha č. 13:
Priamka prechádzajúca ťažiskom T trojuholníka ABC pretína stranu AB v bode P a stranu CA v bode Q. Dokážte, že

$$4 \cdot PB \cdot QC \leq PA \cdot QA.$$

Úloha č. 14:
Prirodzené čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$.
a) Dokážte, že x je deliteľné piatimi.
b) Existujú celé čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv/`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Nájdite a popíšte spôsob, ako zostrojiť trojuholník ABC, ak je daná dĺžka ťažnice na stranu AC, výšky na stranu AB a veľkosť uhla pri vrchole B.

Úloha č. 2:
Dĺžky základní lichobežníka $ABCD$ sú $|AB| = 15$ cm a $|CD| = 9$ cm a jeho výška je 4 cm. Keď predĺžime strany AD a BC, tak sa pretnú v bode E. Bod F je stredom strany AB, bod G je stredom strany BC. Zistite obsah trojuholníka FGE.

Úloha č. 3:
Na stranách AB a DC obdĺžnika $ABCD$ sú body F a E zvolené tak, že $AFCE$ je kosoštvorec. Zistite dĺžku úsečky EF, ak viete, že $|AB| = a$ a $|BC| = b$.

Úloha č. 4:
Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech CD je výška na stranu AB, CF je ťažnica na stranu AB a CE je os uhla BCA. (Body D, E aj F ležia na prepone AB.) Dokážte, že $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ECF|$.

Úloha č. 5:
Dĺžky strán trojuholníka sú tri za sebou idúce prirodzené čísla. Vieme, že v tomto trojuholníku je os uhla kolmá na ťažnicu. Nájdite dĺžky strán tohto trojuholníka.

Úloha č. 6:
Bod M leží vnútri strany BC rovnostranného trojuholníka ABC. Nech N je taký bod ležiaci vnútri polroviny určenej priamkou BC neobsahujúcej bod A, že trojuholník BMN je tiež rovnostranný. Nech P, Q, R sú stredy úsečiek AB, BN, CM. Dokážte, že aj trojuholník PQR je rovnostranný.

Úloha č. 7:
Daný je trojuholník ABC. Bod B' je obraz bodu B v stredovej súmernosti so stredom C, bod C' je obraz bodu C v stredovej súmernosti so stredom A a bod A' je obraz bodu A v stredovej súmernosti so stredom B.
a) Zistite pomer obsahov trojuholníkov $AC'A'$ a ABC.
b) Zmažeme body A, B, C a ostanú len body A', B', C'. Dá sa z týchto troch bodov zrekonštruovať trojuholník ABC? Svoju odpoveď úplne zdôvodnite.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Priamky AB, CD sa pretínajú v bode K, priamky BC, AD sa pretínajú v bode L. Os uhla AKD pretína priamky BC, AD po poradí v bodoch Q, S, os uhla ALB pretína priamky AB, CD po poradí v bodoch P, R. Štvoruholník $PQRS$ je konvexný. Dokážte, že $PQRS$ je kosoštvorec práve vtedy, keď sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica.

Úloha č. 9:
Majme trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole C a bod D na strane BC taký, že $|AC| + |AB| = 2|AD|$. Ťažnica CM pretína priamku AD v bode N. Dokážte, že $|AN| \leq 2|ND|$.

Úloha č. 10:
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Kružnica s priemerom AV pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A a K. Priamka KV pretína úsečku BC v bode M. Dokážte, že M je stredom úsečky BC.

Úloha č. 11:
V rovine je daná kružnica $k(S, r)$ a bod A rôzny od bodu S. Zostrojte na polpriamke SA bod B taký, že $|SA|\cdot|SB| = r^2$. Pri konštrukcii môžete použiť iba kružidlo. Popíšte vašu konštrukciu pre každú polohu bodu A.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech n je prirodzené číslo a $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1})^{1/n} \geq a_1^{1/n} - a_2^{1/n} + a_3^{1/n} - a_4^{1/n} + \cdots - a_{2n}^{1/n} + a_{2n+1}^{1/n}.$$

Úloha č. 13:
V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš d liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d+1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.

Úloha č. 14:
Daný je stredovo súmerný mnohouholník M (nemusí byť konvexný). Dokážte, že existuje rovnobežník R taký, že stredy jeho strán ležia na obvode mnohouholníka M a pritom mnohouholník M je podmnožinou rovnobežníka R.

Odporúčaná literatúra

V prípade, že máte záujem o nejakú peknú knihu o matematike, napíšte nám mail na adresu *mito@kms.sk*, radi vám pomôžeme.

Termín odoslania riešení: **30. október 2006** (pre zahraničie 27. október 2006)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`