

Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 29. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chcú by uspeli na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u + m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy (3 – 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústreďenie bude pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších spoň 5 s najlepším bodovým ziskom celkovo a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústreďenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi Slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účasti na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi úspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústreďenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy (7 – 11) môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prvých piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania štvrtej a piatej série sú v tomto letáku, ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.

Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení použiješ odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Víťané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ u. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase 9⁰⁰ – 14⁰⁰. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Nezabudnite, najbližší MaK sa koná už 23. 2. tohto roku.

..... TU ODSTRIHNI!!!

Prihláška do letnej časti KMS 2007/2008 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:
 Škola:
 Trieda so zameraním na matematiku: áno—nie
 Počet účastí na celoštátnom kole MO:, z ktorých bolo úspešných.
 Adresa domov:
 Adresa pre poštu (domov – internát – škola):
 Tel. domov: mobil (vlastný): e-mail:

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2007/2008**Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Mižo dostal na Vianoce novú grafickú kalkulačku a veľmi sa jej potešil. Keďže nie je príliš technicky nadaný, naučil sa na nej zatiaľ iba zadávať prvočísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a násobiť ich.

- Koľko rôznych výsledkov vie Mižo dostať vynásobením niektorých dvoch zo spomínaných čísel?
- Koľko rôznych párných výsledkov vie Mižo dostať vynásobením niektorých troch zo spomínaných čísel? (Čísla, ktoré Mižo násobí, sa samozrejme môžu aj rovnáť.)

Úloha č. 2:

Traja kamaráti sedia okolo stola a pijú kofolu. Každý má na začiatku vo svojom pohári určité neznáme množstvo kofoly, dohromady jej však majú presne tri litre. (Predstavte si veľmi veľké poháre.) Prvý vezme svoj pohár a rozdelí kofolu v ňom rovnakým dielom medzi poháre zvyšných dvoch. Potom spraví so svojim pohárom to isté druhý a po ňom aj tretí. Nakoniec má každý v pohári rovnaké množstvo kofoly, ako mal na začiatku. Koľko kofoly majú jednotliví kamaráti?

Úloha č. 3:

V rovnostrannom trojuholníku ABC so stranami dĺžky 12 m nájdite taký bod S , aby obsahy trojuholníkov ABS , BCS , CAS boli v pomere 1 : 2 : 3.

Úloha č. 4:

Rišo s Katkou chcú sedieť na svadbe za veľkým kruhovým stolom s polomerom dva metre. Nepodarilo sa im však zohnať iné ako kruhové obrusy s polomerom jeden meter. Poradte im, ako pokryť celý stôl s použitím maximálne siedmich takýchto obrusov, alebo vysvetlite, prečo sa to nedá.

Úloha č. 5:

Ondro písal písomku z dejepisu, na ktorej bolo 30 otázok. Pravidlá bodovania hovoria, že ak študent odpovie na x otázok správne, na y otázok nesprávne a na zvyšných $30 - x - y$ otázok sa rozhodne neodpovedá, dostane z písomky $30 + 4x - y$ bodov. Ondrovi sa podarilo získať $n > 80$ bodov a hneď sa s tým pochválil Škrečkovi. Škreček z tohto počtu bodov dokázal zistiť, koľko mal Ondro správnych odpovedí. Navyše si všimol, že keby Ondro získal ľubovoľný menší počet bodov ako n ale väčší ako 80, nedal by sa už počet jeho správnych odpovedí určiť jednoznačne. Na koľko otázok z písomky odpovedal Ondro správne?

Úloha č. 6:

Nájdite zvyšok čísla $6^{83} + 8^{83}$ po delení

- číslom 7,
- číslom 49. Nezapodíajte uviesť aj postup, ktorým ste riešenie našli, a dokázať, že vaše riešenie je správne.

Úloha č. 7:

Kuna rada skáče po prirodzených číslach. Avšak neskáče hocijako, robí len nasledovné skoky: Z čísla n sa vie dostať na číslo $2n$ a naopak. Z čísla n sa vie taktiež dostať na číslo $3n + 1$ alebo naopak. Vie sa z každého prirodzeného čísla nejakou postupnosťou skokov dostať na číslo 1?

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Petko hodil 15-krát mincou a zapísal si postupnosť hláv a znakov, ktorá mu padla. Potom zrátal počet dvojíc hlava-hlava, hlava-znak, znak-hlava, znak-znak, ktoré padli v dvoch po sebe idúcich hodoch. Vyšli mu postupne počty 2, 3, 4, 5. Koľko je rôznych postupností, ktoré môže mať Petko zapísané?

Úloha č. 9:

Pre ktoré prirodzené čísla n je výraz $n^2 + 3^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla?

Úloha č. 10:

Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDC = 36^\circ$, $\sphericalangle CBD = 18^\circ$ a $\sphericalangle BAC = 72^\circ$. Uholpriečky tohto štvoruholníka sa pretínajú v bode P . Zistite veľkosť uhla APD .

Úloha č. 11:

Kružnica, rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými $1, 2, 3, \dots, n$, reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

Kategória GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Špeciálne egyptské číslo je také prirodzené číslo, ktoré sa dá napísať ako súčet nie nutne rôznych prirodzených čísel so súčtom prevrátených hodnôt rovným 1. Napríklad $32 = 2 + 3 + 9 + 18$ a zároveň $1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1$.

- Dokážte, že existuje číslo N také, že všetky od neho väčšie prirodzené čísla sú špeciálne egyptské čísla.
- Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú špeciálne egyptské. V riešení môžete využiť aj počítač, ak tak ale spravíte, musíte dokázať správnosť použitého programu.

Úloha č. 13:

Trojuholník ABC má strany dĺžky a, b a c . Trojuholník $A'B'C'$ má strany dĺžky $a + b/2, b + c/2$ a $c + a/2$. Dokážte, že obsah trojuholníka $A'B'C'$ je aspoň $9/4$ obsahu trojuholníka ABC .

Úloha č. 14:

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré pre každé reálne x, y spĺňajú vzťah

$$f(x + y) = f(x)f(y)f(xy).$$

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou www.kms.sk/archiv. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

www.cut-the-knot.org

www.kalva.demon.co.uk

www.cbel.com/math_recreations

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **3. marca 2008** (pre zahraničie 29. februára 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **6. marca 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

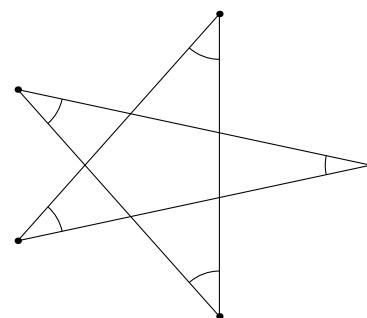
www.kms.sk

Zadania 2. série letnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Aký je súčet uhlov v cípoch päťcípej hviezdy? Päťcípá hviezda je útvar ako na obrázku, pričom jej strany ani uhly nemusia byť rovnako dlhé.



Úloha č. 2:

Nájdite šesťciferné číslo, ktoré končí číslicou 6 a keď túto číslicu presunieme na začiatok, dostaneme štvornásobok pôvodného čísla.

Úloha č. 3:

Na sústreďení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústreďením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.

Úloha č. 4:

Dokážte, že ak a, b, c sú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka, pričom c je dĺžka prepony, potom pre všetky prirodzené čísla $k > 2$ platí:

- $a^3 + b^3 < c^3$,
- $a^k + b^k < c^k$.

Úloha č. 5:

Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC . Zostrojme úsečky rovnobežné so stranami trojuholníka prechádzajúce bodom P . Obsahy troch trojuholníkov, ktoré nám týmto vznikli, sú 4, 9 a 49. Aký je obsah trojuholníka ABC ?

Úloha č. 6:

Označme si dve strany trojuholníka a, b a uhly oproti nim označme α, β . Ďalej označme v výšku na tretiu stranu tohto trojuholníka. Dokážte, že

- ak $\alpha + \beta = 90^\circ$, tak $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$,
- ak $|\alpha - \beta| = 90^\circ$, tak $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$.

Úloha č. 7:

Nech M je stred strany CD v rovnobežníku $ABCD$. Dokážte, že bod M leží na osi uhla BAD práve vtedy, keď je uhol AMB pravý.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Do tabuľky s veľkosťou 22×22 vpíšeme čísla $1, 2, 3, \dots, 22^2$, každé práve raz. Je pravda, že vždy vieme vybrať dvojicu políčok susediacich rohom alebo stranou tak, že súčet čísel vpísaných v týchto políčkach bude deliteľný 4?

Úloha č. 9:

Majme lichobežník $ABCD$, v ktorom $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, uhol pri vrchole A je pravý, jeho uhlopriečky sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode O . Nech OE je os uhla AOD , pričom bod E je bod úsečky AD . Nech F je taký bod na BC , že $EF \parallel AB$. Dokážte, že $|EF| = |AD|$.

Úloha č. 10:

Rozhodnite, či existuje funkcia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že pre všetky $n \geq 2$ platí

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n).$$

Úloha č. 11:

Uvažujme mnohoúholník s celočíselnými stranami taký, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé (nemusia byť konvexné). Dokážte, že ak ho vieme pokryť neprekrývajúcimi sa dominovými kockami veľkosti 2×1 umiestnenými rovnobežne s jeho stranami, tak aspoň jedna z jeho strán má párnú dĺžku.

Katégoria GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Dokážte, že z ľubovoľnej množiny deviatich celých čísel vieme vždy vybrať rôzne čísla a , b , c a d tak, že číslo $a + b - c - d$ je deliteľné 20. Zistite, či to platí aj pre ľubovoľnú osemprvkovú množinu celých čísel.

Úloha č. 13:

Dokážte, že existuje také číslo M , že pre každé prirodzené $m > M$ existujú $a, b, c \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$m^3 < a < b < c < (m + 1)^3,$$

a zároveň číslo abc je tretia mocnina prirodzeného čísla.

Úloha č. 14:

V ostrouhlom trojuholníku ABC máme vnútorný bod P . Priamka BP pretína AC v bode E , priamka CP pretína AB v bode F a priamka AP pretína EF v bode D . Označme K päťu kolmice z bodu D na BC . Ukážte, že KD je os uhla EKF .

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou www.kms.sk/archiv. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

www.cut-the-knot.org

www.kalva.demon.co.uk

www.cbel.com/math_recreations

Katégoria **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **26. marca 2008** (pre zahraničie 21. marca 2008).

Katégoria **GAMA**: Termín odoslania riešení je **31. marca 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk