Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 32. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r+u+m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvej a druhej série sú v tomto letáku, ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.

Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- V kategórii GAMA treba príklady 10 a 11 odoslať do termínu odoslania kategórie BETA. Ostatné príklady kategórie GAMA majú termín zvyčajne o pár dní neskôr.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Počnúc minulým rokom je možné **elektronické posielanie** riešení. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po príhlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov. Termín na odovzdanie kategórie GAMA je v deň termínu odoslania tejto kategórie v rovnaký čas.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TEX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke `kms.sk/eriesenia` je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. V prípade posielania korešpondencie domov je však potrebné zaslať nám obálky ako doteraz (pozri ďalej). Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 23. 10. 2010. Bližšie informácie čoskoro nájdete v pozvánke, ktorá príde aj na vašu školu, a na stránke `www.fks.sk/klub`. Môžete sa tešiť hlavne na zaujímavé prednášky z matematiky, fyziky a informatiky.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má stretnutie skoro každú poslednú sobotu v mesiaci. Okrem dvoch zaujímavých (väčšinou matematických) prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Najbližší MaK sa koná už 25. 9. 2010. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.sezam.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2010/2011 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na `kms.sk/eriesenia`!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda .... so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo .... úspešných.
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Igor má 16 kariet očíslovaných od 1 do 16 a ukladá ich na stôl. Jeho brat Paľo mu dovolí dať vedľa seba len také dve karty, ktorých súčet je druhá mocnina prirodzeného čísla. Je možné, aby Igor takto uložil na stôl všetky karty

a) do jedného radu?
b) na obvod jedného kruhu?

Úloha č. 2:
Maškrtní manželia Katka a Miško majú v kuchyni tri misky. Ráno do nich Katka nasypala cukríky. Do prvej ich dala 2010, do druhej tiež 2010 a do tretej, čo zvýšilo. V priebehu dňa ich Miško vyjedal. Vždy si zobral buď 3 cukríky z niektorej misky, alebo po jednom z každej. Večer boli všetky tri misky prázdne. Koľko cukríkov mohlo byť v tretej miske? Nájdite všetky možnosti.

Úloha č. 3:
Každý lístok lotérie *Šťastná sedmička* má na sebe 7-ciferné číslo. Kubo sleduje žrebovanie v priamom prenose a v ruke drží svoj lístok. Moderátor vyžrebuje víťaza a hovorí: „Číslo na tomto lístku má všetky cifry rôzne.“ Kubo od napätia vstáva z gauča, pretože jeho číslo toto spĺňa. „Navyše je deliteľné každou svojou cifrou,“ pokračuje moderátor. Kubo jasá, pretože jeho číslo spĺňa aj toto. Z akých cifier sa skladá číslo na jeho lístku? Môže existovať viac víťazných čísel?

Úloha č. 4:
Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $1 + 2^2 + 3^3 + 4^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

Úloha č. 5:
Na matematickú súťaž sa prihlásilo d dievčat a ch chlapcov. Organizátori nakoniec vyvesili poradie, v ktorom bol na každom mieste práve jeden človek. Kika si poradie prezrela, vyznačila všetky dievčatá a sčítala ich umiestnenia. Tento súčet si označila ako A. Potom preskúmala všetky možné dvojice chlapec – dievča. Ak v dvojici dopadol lepšie *chlapec*, urobila si čiarku. Počet čiarok označila B. Ukážte, že $A - B = d(d + 1)/2$.

Úloha č. 6:
Tri bachraté mravce Ika, Ajka a Maťo spolu sedia v jednom vrchole pravidelného n-uholníka. Každú minútu sa niektorý z nich (nemusí to byť vždy ten istý) pohne do susedného vrcholu v smere hodinových ručičiek, ďalší do susedného vrcholu proti ich smeru a posledný ostane sedieť na mieste. Pre aké n sa môže stať, že sa po nejakom čase všetky tri mravce stretnú v jednom vrchole, ale inom ako na začiatku?

Úloha č. 7:
V štáte Obdĺžnisisipi je mn miest rozmiestnených rovnomerne v pravouhlej mriežke rozmerov $m \times n$, pričom m aj n sú prirodzené čísla. Do každého mesta vedie presne k ciest, ktoré spájajú toto mesto s niekoľkými jeho susednými mestami. Susedné mestá k nejakému mestu sú tie, ktoré sú hore, dole, naľavo alebo napravo od daného mesta (nie diagonálne). Dve mestá môžu byť spojené aj viac ako jednou cestou. *Vyhovujúce* rozmiestnenie ciest je také, že z ľubovoľného mesta sa postupne po cestách vieme dostať do ľubovoľného iného. Určite všetky možné trojice čísel (m, n, k), pre ktoré existuje nejaké vyhovujúce rozmiestnenie ciest. Zdôvodnite tiež, prečo pre iné trojice vyhovujúce rozmiestnenia neexistujú.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky dvojice (a, b) nezáporných celých čísel, pre ktoré sú obidve čísla $a^2 + 4b$ aj $b^2 + 4a$ druhou mocninou celého čísla.

Úloha č. 9:
Kde bolo, tam bolo, v Kráľovstve Múdrych Stvorení, slávny rytier Eduard prezývaný Edo sa po večeroch venoval svojmu koníčku – matematike. Jeden upršaný deň mu spríjemnila istá zvláštna podmnožina A množiny čísel $\{2, 3, \ldots, 2010\}$. O tejto podmnožine sa v kráľovstve šepkalo, že mala aspoň 1003 prvkov. Táto správa sa dostala aj dvornému šašovi Mišovi. Ten po chvíli usúdil, že množina A musí obsahovať aspoň jednu mocninu dvojky, alebo dve čísla, ktorých súčet je mocninou dvojky. Dokážte, že sa nemýlil.

Úloha č. 10:
Jefo si (ako obvykle) z dlhej chvíle písal cez prestávku v škole postupnosť nezáporných celých čísel. Katka mu nakúkala ponad plece a zrazu začala skákať od nadšenia. Jefo sa zľakol, no potom mu Katka vysvetlila, že jeho postupnosť má zaujímavú vlastnosť. Označme jej členy $x_0,\ x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$, pričom $n \geq 0$. Pre všetky j $(0 \leq j \leq n)$ platí, že x_j vyjadruje počet výskytov čísla j v tejto postupnosti. Akú postupnosť mohol mať Jefo napísanú na papieri? Nájdite všetky možnosti.

Úloha č. 11:
Palacinkového cesta nikdy nie je dosť. Vďaka tomuto heslu ho Kubo navyrábal toľko, že sa mu ledva zmestilo do 40 hrncov (tie si musel požičať aj od susedov). Hanke sa to vôbec nepáčilo. Nie to, že toho cesta bolo tak veľa, ale to, že Kubo cesto rozdelil úplne nerovnomerne. Hanka to chcela napraviť. Rozhodla sa, že hladinu cesta v hrncoch bude vyrovnávať nasledovným spôsobom. Zobrala si vždy n hrncov a poprelievala medzi nimi cesto tak, aby vo všetkých n hrncoch bolo rovnako veľa cesta. Toto opakovala dovtedy, kým dosiahla vo všetkých 40 hrncoch rovnakú hladinu cesta. Kubo sa zamyslel, aké najmenšie môže byť takéto n, aby sa to Hanke podarilo bez ohľadu na počiatočné rozloženie palacinkového cesta v hrncoch. Zistite to aj vy.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
V trojuholníku ABC sa vpísaná kružnica dotýka strán AB, BC, CA po rade v bodoch K, L, M. Dokážte, že priesečník výšok trojuholníka KLM, stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a stred opísanej kružnice trojuholníka ABC ležia na jednej priamke.

Úloha č. 13:
Prvočíslo p dáva zvyšok jedna po delení štyrmi. Zjednodušte výraz

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{k^2}{p} \right\},$$

kde $\{x\}$ je desatinná časť x. Desatinná časť x je daná predpisom $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť x (najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie než x).

Úloha č. 14:
Kladné reálne čísla a, b, c, x, y, z spĺňajú vzťahy $cy + bz = a$, $az + cx = b$, $bx + ay = c$. Určte minimálnu hodnotu výrazu

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1}.$$

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh. SPN, Bratislava, 1992.
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov) či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na stránke `kms.sk/kniznica`.

Do pozornosti dávame tiež archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **4. októbra 2010** (pre zahraničie 1. októbra 2010).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **8. októbra 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

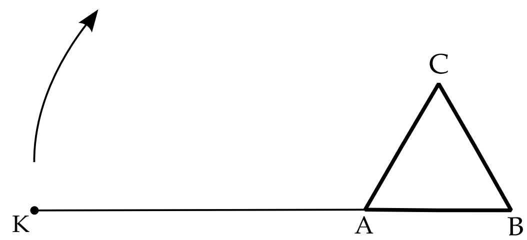
Zadania 2. série zimnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Ondrík nakreslil do roviny dva červené trojuholníky. Tieto trojuholníky vytvorili spolu jeden červený n-uholník. Zistite všetky možné hodnoty n. Červené trojuholníky sa pritom môžu ľubovoľne prekrývať.

Úloha č. 2:
V trojuholníku TBC označme stred strany TB ako D a stred strany TC ako E. Priesečník osí uhlov BDE a CED označme F. Ukážte, že ak F leží na úsečke BC, tak platí $2|BC| = |TC| + |TB|$.

Úloha č. 3:
Psia búda má pôdorys tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou 1 meter. Jej rohové body sú označené A, B a C tak, ako je nakreslené na obrázku. V bode A je prichytená reťaz, na ktorej konci K je pes. Reťaz je dlhá 20 m a je úplne napnutá. Navyše body K, A a B ležia na jednej priamke. Pes začne bežať v smere hodinových ručičiek, pričom beží tak, že je reťaz stále napnutá. Určte vzdialenosť, ktorú takto prejde, kým sa celá reťaz neomotá okolo búdy.



Úloha č. 4:
V obdĺžniku $ABCD$ má strana AB veľkosť $2r$ a strana BC veľkosť r. Nad stranou AB zostrojíme kružnicu k tak, že AB je jej priemerom. Priesečník uhlopriečky BD a kružnice k označme X. Vypočítajte pomer $|BD| : |BX|$.

Úloha č. 5:
V trojuholníku USB zvolíme na strane UB bod P a na strane SB bod C tak, že $2|BP| = |PU|$ a $2|BC| = |CS|$. Na polpriamke UC leží za bodom C bod H, pre ktorý platí $2|HC| = |CU|$. Podobne na polpriamke SP leží za bodom P bod W, pre ktorý platí $2|WP| = |PS|$. Dokážte, že $USHW$ je rovnobežník.

Úloha č. 6:
Daná je kružnica k, do ktorej je vpísaný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Kružnica ℓ, obsahuje body A a B a pretína stranu BC v bode P. ktorý je rôzny od bodu B. Dotyčnica ku kružnici ℓ v bode B pretne kružnicu k v bode Q, ktorý je rôzny od bodu B. Dokážte, že P leží na úsečke AQ *práve vtedy*, keď je úsečka AQ kolmá na priamku BC.

Úloha č. 7:
Máme pravítko bez mierky, ktoré nám umožňuje viesť dvomi danými bodmi priamku a spraviť kolmicu na danú priamku v jej danom bode. Zistite, či vieme týmto nástrojom zostrojiť kolmicu na danú priamku z daného bodu ležiaceho mimo tejto priamky.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Dané sú kružnice k_1 a k_2, ktoré sa pretínajú v dvoch bodoch M a N. Dotyčnica v bode M ku kružnici k_2 pretína kružnicu k_1 v bode A. Dotyčnica v bode M ku kružnici k_1 pretína kružnicu k_2 v bode B. Priesečník priamky AN a kružnice k_2 rôzny od bodu N označme C a priesečník priamky BN a kružnice k_1 rôzny od bodu N označme D. Dokážte, že dĺžky úsečiek AC a BD sú rovnaké.

Úloha č. 9:
V trojuholníku ABC sú P a Q také body na strane AB (bod P je medzi A a Q), že $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle QCB|$. Označme AD os uhla BAC, pričom bod D leží na strane BC. Táto os pretína úsečky CP a CQ postupne v bodoch M a N. Navyše platí, že $|PN| = |CD|$ a $3|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle BCA|$. Dokážte, že trojuholníky CQD a QNB majú rovnaký obsah.

Úloha č. 10:
Máme trojuholník ABC a jeho vnútorný bod P spĺňajúci $|\sphericalangle BPC| = 90°$ a $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCP|$. Označme M a N v tomto poradí stredy strán AC a BC. Predpokladajme, že $|BP| = 2|PM|$. Ukážte, že body A, P a N ležia v tejto situácii na jednej priamke.

Úloha č. 11:
V trojuholníku BUS sú body K a L postupne stredmi strán US a BS. Bod P leží vnútri trojuholníka BUS tak, že uhly UBP, PSB a KBS majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že uhly PLB a BKU majú rovnakú veľkosť.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Definujme vzdialenosť dvoch kruhov v rovine ako reálne číslo, ktoré vznikne odčítaním polomerov oboch kruhov od vzdialenosti ich stredov. V rovine je daných n bodov, pričom $n \geq 1$. Dokážte, že vždy vieme nájsť konečne veľa kruhov, ktoré pokryjú všetkých n bodov, navyše je súčet ich priemerov menší než n a vzdialenosť ľubovoľných dvoch z nich je väčšia než 1.

Úloha č. 13:
Postupnosť reálnych čísel $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$ spĺňa $1 < a_1 < 2$ a pre všetky prirodzené k platí $a_{k+1} = a_k + k/a_k$. Dokážte, že existuje najviac jedna taká dvojica (i, j), že $i < j$ a zároveň $a_i + a_j$ je celé číslo.

Úloha č. 14:
Množina X má 56 prvkov. Nájdite najmenšie prirodzené n také, že platí nasledovné tvrdenie: Ak vyberieme ľubovoľných 15 podmnožín X takých, že počet prvkov zjednotenia ľubovoľných sedem z nich je aspoň n, potom z týchto 15 podmnožín určite vieme vybrať tri s neprázdnym prienikom.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh. SPN, Bratislava, 1992.
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov) či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na stránke `kms.sk/kniznica`.

Do pozornosti dávame tiež archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **2. novembra 2010** (pre zahraničie 29. októbra 2010).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **5. novembra 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.