



Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 34. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený nový seminár *iKS* (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Informácie o tomto novom seminári sú priložené v samostatnom letáku. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy (3 – 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústreďenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústreďenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

Katégoria BETA

Katégoriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi úspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v katégorii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústreďenie KMS katégorie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy (7 – 11) môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto katégorii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústreďenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Spoločné pre obe katégorie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posieľaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v \TeX . Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posieľať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezapudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke kms.sk/eriesenia. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť \TeX , prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke kms.sk/eriesenia je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasieľať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posieľať klasickým spôsobom.

Náboj

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj, ktorý je naplánovaný na piatok 12. apríla 2013. Podrobnejšie informácie nájdete onedlho na stránke www.naboj.org a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 13. apríla 2013 (po Náboji KMS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke klub.trojsten.sk.

..... TU ODSTRIHNI!!!

Prihláška do letnej časti KMS 2012/2013 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na kms.sk/eriesenia!**

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:
Škola:
Trieda
Počet úcastí na celoštátnom kole MO:, z ktorých bolo úspešných
Adresa domov:
Adresa pre poštu (domov – internát – škola):
Tel. domov: mobil (vlastný): e-mail:

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Nájdite všetky možnosti pre 21 po sebe idúcich čísel, z ktorých je aspoň 8 prvočísel.

Úloha č. 2:

Nájdite prvočíslo p , pre ktoré platí, že $2013p + 1$ je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

Úloha č. 3:

Reálne čísla a, b spĺňajú vzťah $a - b \geq 2$. Dokážte, že $a^4 + b^4 \geq 2$.

Úloha č. 4:

Z každého vrcholu konvexného mnohostena vychádzajú presne tri hrany, z ktorých aspoň dve sú rovnako dlhé. Dokážte, že daný mnohosten má tri hrany rovnakej dĺžky.

Úloha č. 5:

Kubo s Mojom si zvyknú krátiť čas nasledovnou hrou. Kubo hodí dvomi hracími kockami, sčíta body, ktoré mu na nich padli a tento súčet označí a . Ak je a väčšie ako deväť, tak znovu hodí dvomi kockami a súčet bodov, ktoré mu padli označí b . Ak a je menšie ako desať, tak hodí dvanásťstenom a počet bodov, ktoré mu padli označí b . Svoje výsledné skóre vypočíta ako súčet $a + b$. Mojo na začiatku hodí dvanásťstenom (má dvanásť stien, na ktorých sú čísla od jeden do dvanásť) a počet bodov, ktoré mu padli označí a . Zvyšok jeho hry je rovnaký ako Kubov. Vyhráva ten, koho výsledné skóre je väčšie¹. Rozhodnite, kto z nich vyhráva častejšie. Svoje rozhodnutie zdôvodnite.

Úloha č. 6:

Dominik Žltý mal vypočítať príklad $X \cdot Y/Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y je trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Dominik ale prehliadol bodku a súčin $X \cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal Dominik počítať?

Úloha č. 7:

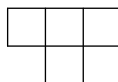
Dokážte, že pre každé iracionálne číslo a existujú iracionálne čísla b, c také, že čísla $a + b$ a ac sú racionálne, a zároveň čísla $a + c$ a ab sú iracionálne.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Vieme uložiť čísla 1 až 100 do štvorcovej siete 10×10 tak, aby v ľubovoľnom T-čku, zloženom zo štyroch políčok, bol súčet čísel párny? T-čko môže byť aj otočené.



Úloha č. 9:

Máme kladné celé čísla a, b . Posledná cifra výrazu $a^2 + ab + b^2$ je 0. Ukážte, že aj predposledná cifra musí byť 0.

Úloha č. 10:

Kuna, ako iste viete, je svetoznáma športovkyňa, ktorá sa preslávila hlavne poskakovaním po číslach. Najnovšie trénuje svoje zostavy poskakovania na spartakiádu. Správna zostava musí spĺňať:

- kuna na začiatku zostavy sedí na racionálnom čísle,
- ak sa nachádza na čísle a , tak nabudúce skočí na číslo $2a^2 - 1$,
- aspoň raz sa objaví na čísle, na ktorom už počas zostavy bola.

Aké zostavy má kuna v repertoári?

¹Ak majú rovnaké výsledné skóre, tak je remíza a nevyhráva ani jeden.

Úloha č. 11:

Edo si vyznačil na tabuli k rôznych bodov. O k vieme, že je to prirodzené číslo, ktoré je rovné nanajvýš 2013. Edo si z geometrie pamätá, že ľubovoľné dva rôzne body určujú priamku. Koľko rôznych priamok môže určovať Edova množina bodov?

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **25. február 2013** (pre zahraničie 22. február 2013).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série letnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Marek nakreslil n -uholník, ktorý sa dá jednou priamkou rozdeliť na osem menších útvarov. Aké najmenšie mohlo byť n ? Nezabudnite zdôvodniť, že pre menšie n sa to nedá rozdeliť.

Úloha č. 2:

Trojuholník ABC má strany s dĺžkami a, b, c . Označme polovicu obvodu tohto trojuholníka ako s . Dokážte nerovnosť

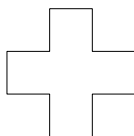
$$2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq a.$$

Úloha č. 3:

Body P a Q ležia na najdlhšej strane AB trojuholníka ABC tak, že $|AQ| = |AC|$ a $|BP| = |BC|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

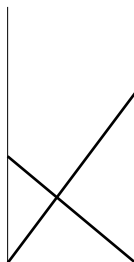
Úloha č. 4:

Betka napiekla koláč v tvare rovnostranného kríža (ako na obrázku). Andrej jej povedal, že ho dokáže rozrezať dvomi rovnými rezmi a rozrezané kúsky presunúť tak, že koláč dostane tvar štvorca. Betka nevie ako to spraviť. Poradte jej.



Úloha č. 5:

Do „dvojrozsmernej studne“ s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba 3 metre sme hodili dve rovné palice dĺžok 4 a 5 metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice „pretínajú“?



Úloha č. 6:

Je možné niekoľkými priamkami rozdeliť konvexný sedemnásťuholník na štrnásť trojuholníkov?

Úloha č. 7:

Máme daný trojuholník ABC . Body M a N ležia postupne na osiach uhlov pri vrcholoch C a B , pričom platí $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BNC| = 90^\circ$. Dokážte, že priamka MN pretína strany AB a AC v bodoch dotyku vpísanej kružnice trojuholníka ABC .

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Bod O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC . Kružnica k opísaná trojuholníku BCO pretína priamky AB, AC postupne v bodoch D, E (rôznych od B, C). Úsečka OG je priemerom kružnice k . Dokážte, že $ADGE$ je rovnobežník.

Úloha č. 9:

Kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch X, Y . Kružnica k sa zvnútra dotýka kružníc k_1, k_2 postupne v bodoch P, Q . Úsečka XY pretína k v bodoch M, N . Polpriamky PM a PN pretínajú k_1 postupne v bodoch A a D , polpriamky QM a QN pretínajú k_2 postupne v bodoch B a C . Dokážte, že $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 10:

Máme dané štyri body A, B, C, D . Lubovoľné dve kružnice také, že jedna prechádza bodmi A, B a druhá prechádza bodmi C, D , sa pretínajú. Ak sa tieto kružnice pretínajú práve v dvoch bodoch, označíme tieto body E a F . Dokážte, že existuje bod G taký, aby pre všetky možné dvojice bodov E a F ležali body E, F, G na priamke.

Úloha č. 11:

Máme danú priamku p a na nej tri body T, U, V . Nájdite množinu všetkých možných stredov vpísanej kružnice trojuholníka ABC takého, že body A, B ležia na priamke p a body T, U, V sú postupne priesečníky priamky p s ťažnicou, výškou a osou uhla trojuholníka ABC .

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese <http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf>.

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **3. apríl 2013** (pre zahraničie 3. apríl 2013).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.