



Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 34. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolačkov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený nový seminár *iKS* (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy (3 – 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín, a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústreďenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústreďenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

Katégoria BETA

Katégoriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi úspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v katégorii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústreďenie KMS katégorie BETA alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy (7 – 11) môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto katégorii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústreďenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Spoločné pre obe katégorie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posieľaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v \TeX . Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posieľať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezapudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke kms.sk/eriesenia. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť \TeX , prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke kms.sk/eriesenia je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasieľať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posieľať klasickým spôsobom.

Náboj KMS

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj KMS. Podrobnejšie informácie nájdete onedlho na stránke kms.sk/naboj a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 10. novembra 2012 (po Náboji FKS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke www.fks.sk/klub.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK). Ďalšie informácie môžete nájsť na stránke www.sezam.sk.

..... TU ODSTRIHNI!!!

Prihláška do letnej časti KMS 2012/2013 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na kms.sk/eriesenia!**

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:
Škola:
Trieda
Počet účastí na celoštátnom kole MO:, z ktorých bolo úspešných
Adresa domov:
Adresa pre poštu (domov – internát – škola):
Tel. domov: mobil (vlastný):
e-mail:

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2012/2013

Katégoria ALFA

Úloha č. 1:

Po ceste prešlo dokopy 19 motoriek a áut. Keby prešlo o štyri autá menej, bolo by ich toľko ako dvojnásobok počtu motoriek, ktoré prešli. Koľko prešlo po ceste áut a koľko motoriek?

Úloha č. 2:

Aká cifra je na 7000. mieste za desatinnou čiarkou v čísle $\frac{1}{7000}$?

Úloha č. 3:

Určte počet všetkých trojčiferných čísel, ktoré sú devätnásťkrát väčšie ako ich ciferný súčet.

Úloha č. 4:

Turnaja vo futbale sa zúčastnilo N družstiev. Turnaj sa hral systémom každý s každým. Najviac koľko družstiev mohlo vyhrať aspoň polovicu zápasov, ak

- a) N je nepárne?
- b) N je párne?

Úloha č. 5:

Alibabova žena našla v zbojníckej jaskyni vrece s diamantmi. Diamantov bolo vo vnútri n , pričom prvý z nich vážil 1 g, druhý 2 g, ďalší 3 g, ..., posledný n gramov. Alibaba chcel, aby si diamanty rozdelili na dve časti, pričom tieto dve časti majú mať rovnakú hmotnosť. Pre aké n sa dá korisť rozdeliť?

Úloha č. 6:

Snehulienka má obdĺžnikovú záhradku s celočíselnými rozmermi x a y . Rozhodla sa zväčšiť si ju na rozmery $x + 5$ a $y + 6$. Týmto počínom sa jej záhradke trikrát zväčší obsah. Aké rozmery mohla záhradka pôvodne mať?

Úloha č. 7:

Cédečko má fóbiu z reálnych čísel a, b, c, x, y . Jeho strach je spôsobený tým, že platí $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$, $c^3 + cx + y = 0$ a navyše sú čísla a, b, c rôzne. Upokojí sa, iba ak sa dozvie, že súčet čísel a, b, c je nula. Dokážte, že sa nemá čoho báť.

Katégoria BETA

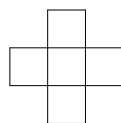
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

Nech q je kladné racionálne číslo. Dieťaťom čísla q nazvime čísla $q + 1$ a $\frac{q}{q+1}$. Potomkami čísla q nazvime deti q a deti všetkých potomkov q . Ondro napísal na tabuľu všetkých potomkov čísla 1. Dokážte, že každé kladné racionálne číslo sa nachádza na tabuli práve raz.

Úloha č. 9:

Edo si pod vankúšom schováva nekonečný štvorčekový papier. Jednej noci ho navštívila zubná víla Stanka a zafarbila každý štvorček na tomto papieri jednou z jej piatich obľúbených farieb¹. Edo si ráno všimol, že každý kríž z piatich štvorčekov (ako na obrázku) obsahuje každú farbu práve raz. Vzápätí si uvedomil, že potom aj každý obdĺžnik 5×1 musí obsahovať každú farbu práve raz. Prečo je to tak?



Úloha č. 10:

Filip písal na tabuľu pod seba čísla. Prvé a druhé číslo bolo 1. Každé ďalšie si vyrátal sčítaním dvoch predošlých a pripočítaním čísla 1. Prizerajúci sa Matúš sa zamyslel nad nasledujúcou otázkou: aké sú všetky dvojice prirodzených čísel (n, m) také, že n -té číslo na tabuli je tvaru $2^m - 1$?

¹cyklaménová, lososová, fuchsiová, búrková modrá, biela

Úloha č. 11:

Podmnožina prirodzených čísel S sa nazýva *čarovná*, ak pre každé dva rôzne prvky i, j z tejto podmnožiny platí, že do množiny S patrí aj číslo

$$\frac{i+j}{\text{NSD}(i,j)}.$$

Nájdite všetky čarovné množiny. Poznámka: $\text{NSD}(i, j)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel i, j .

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov: Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **8. október 2012** (pre zahraničie 5. október 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2012/2013

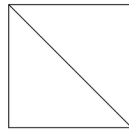
Kategória ALFA

Úloha č. 1:

V trojuholníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 20^\circ$. Na stranách BC , CA sú body D , E umiestnené tak, že $|\sphericalangle ADB| = 50^\circ$ a $|\sphericalangle AEB| = 60^\circ$. Úsečky AD a BE sa pretínajú v bode S . Zistite veľkosť uhla ASB .

Úloha č. 2:

Koľko najmenej zápaliiek by vám stačilo k zostrojeniu predmetu, ktorý vypadá spredu (nárysu), zboku (bokorysu) aj zhora (pôdorysu) tak, ako je nakreslené na obrázku? Zápalky sa nesmú lámať. Nezabudnite zdôvodniť, prečo to s menej zápalkami nejde.



Úloha č. 3:

Majme štvorec $ABCD$. Nad stranou CD zostrojme rovnostranný trojuholník DCE (bod E leží mimo štvorca $ABCD$). Nad jeho stranou CE zostrojme ďalší rovnostranný trojuholník ECF . Teraz zostrojme rovnoramenný trojuholník CGF s pravým uhlom pri vrchole F (tak, aby sa posledné dva trojuholníky neprekrývali). Pokračujeme rovnoramenným trojuholníkom CGH s pravým uhlom pri vrchole G . Ležia A , B a H na jednej priamke? Svoju odpoveď poriadne zdôvodnite.

Úloha č. 4:

V priestore je daná rovina α a bod A , ktorý v nej neleží. Zostrojte rovinu β rovnobežnú s rovinou α tak, aby v nej ležal bod A . Použiť môžete:

- kružidlo — ak mu zadáte rovinu, bod v nej a polomer, tak zostrojí kružnicu v danej rovine, so stredom v danom bode a s daným polomerom,
- guľidlo — ak mu zadáte bod a polomer, tak zostrojí guľu so stredom v danom bode a s daným polomerom,
- pravítko — ak mu zadáte dva body, tak zostrojí priamku, ktorá prechádza oboma danými bodmi,
- rovnítko — ak mu zadáte tri body, ktoré neležia na jednej priamke, tak zostrojí rovinu v ktorej ležia všetky tri dané body.

Postup musí mať konečný počet krokov.

Úloha č. 5:

Dokážte, že v každom mnohostene existujú dve steny s rovnakým počtom hrán.

Úloha č. 6:

Koľko najviac stien môže mať teleso, ktoré vznikne spojením dvoch štvorstenov (štvorsteny môžu cez seba prechádzať)? Prečo ich nemôže byť viac?

Úloha č. 7:

Úsečky AB a CD majú dĺžku 1 a pretínajú sa v bode O . Uhol AOC má veľkosť 60° . Dokážte, že $|AC| + |BD| \geq 1$.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Máme konvexný štvoruholník z papiera. Kedy sa dá zložiť pekne? Pekne znamená, že existuje bod vnútri štvoruholníka, do ktorého keď zložíme vrcholy, dostaneme nový štvoruholník tvorený práve dvoma vrstvami papiera a to po celej jeho ploche.

Úloha č. 9:

V trojuholníku ABC platí $|CA| = |CB|$. Bod P leží na opačnom oblúku kružnice opísanej tomuto trojuholníku ako bod C . Bod D je pätou kolmice z bodu C na priamku PB . Ukážte, že $|PA| + |PB| = 2 \cdot |PD|$.

Úloha č. 10:

Na stranách BC , CA , AB trojuholníka ABC sú zvolené postupne body D , E , F tak, aby polomery kružníc vpísaných trojuholníkom AEF , BFD , CDE boli rovné r_1 . Polomery kružníc vpísaných trojuholníkom DEF a ABC sú postupne r_2 a r . Dokážte, že $r_1 + r_2 = r$.

Úloha č. 11:

Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC , CA , AB postupne v bodoch A_1 , B_1 , C_1 . Úsečka KC_1 je priemerom tejto kružnice a bod D je priesečníkom priamok B_1C_1 a A_1K . Dokážte, že $|CD| = |CB_1|$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese <http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf>.

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. november 2012** (pre zahraničie 2. november 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.