



## Korespondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 35. ročníka Korespondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO-A, je určený seminár *iKS* (Medzinárodný korespondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

*vaši organizátori*

### Pravidlá KMS

**Pozor, pravidlá sa od minulého ročníka zmenili.**

#### Všeobecné informácie o korespondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvej série máš pred sebou a zadania druhej a tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

#### Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré príklady môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient  $\kappa$ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako  $\kappa = r + u + c$ , kde číslo  $r$  je tvoj ročník, číslo  $u$  je počet tvojich úspešných semestrov a číslo  $c$  je počet tvojich účasti na celoštátnom kole matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient  $\kappa$  je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

#### Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené príklady 1–7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 1$  a úlohu číslo 2 len študenti s  $\kappa \leq 2$ . Ostatné úlohy (3–7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

## Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené príklady 4–10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 4$  a úlohu číslo 5 len študenti s  $\kappa \leq 7$ . Ostatné úlohy (6–10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

### Pozývanie na sústredenia

Po zimnej časti sa uskutočnia dve sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 30 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

Po letnej časti sa uskutoční *jedno* sústredenie spoločné pre obe kategórie. Z každej kategórie bude na sústredenie pozvaných aspoň 15 najúspešnejších riešiteľov. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

### Pokyny pre riešiteľov

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posieľaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ u. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, že chceš korešpondenciu posieľať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezapudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

### Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke [kms.sk/eriesenia](http://kms.sk/eriesenia). Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke [kms.sk/eriesenia](http://kms.sk/eriesenia) je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa ti totiž budú späť posieľať klasickým spôsobom.

### Matematický Náboj

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Matematický Náboj, ktorý je naplánovaný na piatok 11. apríla 2014. Podrobnejšie informácie nájdete na stránke [math.naboj.org](http://math.naboj.org) a budú tiež zaslané na vašu školu.

### Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 12. apríla 2014 (po Matematickom Náboji). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke [klub.trojsten.sk](http://klub.trojsten.sk).

..... TU ODSTRIHNI!!! .....

Prihláška do letnej časti KMS 2013/2014 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: ..... Dátum narodenia: .....  
Škola: ..... Trieda: .....  
Počet účastí na celoštátnom kole MO: .....  
Adresa domov: .....  
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): .....  
Tel. domov: ..... mobil(vlastný): .....  
e-mail: .....

**Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!**



## Zadania 1. série letnej časti KMS 2013/2014

### Kategória ALFA

„Vitajte v hoteli Lexington,“ ozvalo sa spoza pultíku so zvončekom, na ktorý ste pred malou chvíľou zazvonili. „Želáte si?“

„Dobrý deň, radi by sme si tu u vás zahrali biliard. Bolo by to možné?“

„Samozrejme,“ recepcný si vás premeral pohľadom a dodal: „ale máte čím zaplatiť?“ Po minútach hrabania vo vreckách, keď sa vám okrem troch gombíkov a štyroch obalov od margotky podarilo nájsť aj osoplenú vreckovku, sa nad vami zľutoval a poslal vás hrať aspoň na stôl číslo 3.

#### Úloha č. 1: ( $\kappa \leq 1$ )

Biliardový stôl číslo 3 v hoteli Lexington bol pôvodne obyčajný obdĺžnikový stôl so štyrmi rovnako dlhými nohami. Jedného dňa mu z každej nohy niekto kúsok odrezal. Páchatel' to urobil tak umne, že stôl sa vôbec nekýve. Na mieste činu sa podarilo zaistiť tri odrezky s dĺžkami 8, 9 a 10 cm. Štvrtý odrezok si vzal páchatel' ako suvení. Polícia zadržala niekoľkých podozrivých s podivnými odrezkami vo vreckách. Pomôžte im usvedčiť pravého páchatel'a a nájdite všetky rôzne dĺžky, ktoré môže mať štvrtý odrezok.

Páchatel' sa volal Oliver a vyzeral vcelku sympaticky. Zjavne sa zaujímal o drevené výrobky a matematiku. Keď sa totiž s putami na rukách dozvedel, akým spôsobom sa vám ho podarilo usvedčiť, rozhodol sa, že váš um ešte otestuje. Vytiahol z ľavého vrečka niečo, čo vyzeralo ako kváder a spustil:

#### Úloha č. 2: ( $\kappa \leq 2$ )

Mám tu kváder zložený z  $3 \times 4 \times 5$  drevených kociek. Koľko najviac môžem z týchto kociek odobrať, aby som dostal súvislú stavbu, ktorá bude mať rovnaký povrch ako pôvodný kváder? Kocky sú k sebe prilepené tak, že keď chcem ktorúkoľvek odobrať, tak sa mi to podarí, ale nemusím sa báť, že by sa mi stavba sama od seba rozpadla.

Po tomto výstupe ho už policajti zobrali a vy ste na malú chvíľu zostali sami. Naozaj len na malú, pretože sa k vám dokotúlala biliardová guľa od stola číslo 3. Ako všetky biliardové gule, aj táto mala na sebe číslo, ale to sa pred vami schovávalo na odvrátenej strane gule.

#### Úloha č. 3: ( $\kappa \leq 3$ )

Nájdite najväčšie prirodzené číslo, ktoré delí výraz  $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$  pre všetky prirodzené čísla  $a, b, c, d$ .

Biliardová guľa sa kotúlala ďalej a nezastavila sa ani keď ste na ňu volali jej číslom. Povedali ste si, že je to nevychovaná guľa a pohrdavo ste odišli z príbehu. Rozprávačovi sa však táto guľa zapáčila a naďalej ju sledoval. Nebezpečne sa rútila oproti novinovému stánku. Narazila doň. Spadli na ňu noviny, a to rovno sekciou s krížovkami a sudoku. Biliardové gule nezvyknú lúštiť sudoku, a tak si pri pohľade naň položila otázku:

#### Úloha č. 4: ( $\kappa \leq 4$ )

Dajú sa do mriežky  $9 \times 9$  vpísať čísla od 1 do 81, každé práve raz, tak, aby súčin čísel v prvom riadku bol rovnaký ako súčin čísel v prvom stĺpci, súčin v druhom riadku bol rovnaký ako súčin v druhom stĺpci, a tak ďalej, až aby bol v deviatom riadku rovnaký súčin ako v deviatom stĺpci?

Už-už sa jej skoro podarilo zodpovedať si svoju otázku, keď jej vietor otočil stránku a guľa sa s takou chuťou začítala do článku o prestavbe miestnej zoo, že jej vôbec nevadilo, že nevie čítať.

#### Úloha č. 5: ( $\kappa \leq 7$ )

Dočítala sa, že zoo má tvar konvexného mnohouholníka, ktorý sa dá rozdeliť na niekoľko rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Hneď ju zaujalo, koľko asi tento mnohouholník môže mať vrcholov. Pomôžte jej nájsť všetky možnosti.

Počet vrcholov nebola jediná vec, ktorá zaujala biliardovú guľu na zoo. V živote ešte nevidela slona, a tak sa rozhodla, že si ho pôjde omrknúť zblízka a už sa aj guľala smerom k zoo. Podarilo sa jej dostať vstup zadarmo, pretože spĺňala výškový limit pre deti. Celá natešená sa ponáhľala ku kletke so slonom. Kletka však bola prázdna a pred ňou sa dvaja ošetrovatelia na niečom dohadovali.

#### Úloha č. 6:

V zoo majú 8 rôznych zvierat<sup>1</sup> a kvôli prestavbe majú k dispozícii iba 4 kletky. Do každej kletky sa zmestia dve zvieratá. Medzi niektorými zvieratami panujú nepriateľské vzťahy, a to tak, že každé zviera má maximálne troch nepriateľov a nepriateľstvo je vzájomné. Je možné ubytovať všetky zvieratá do kletiek tak, aby spolu v kletke neboli znepriatelené zvieratá?

<sup>1</sup>medzi inými aj slona

Slon to síce nebol, ale opodiaľ bolo niečo, na čo sa tiež dalo pozerieť.

#### Úloha č. 7:

V kruhu sedelo 2014 veveričiek. Na začiatku mala každá párny počet orieškov. Potom sa začali hrať zaujímavú hru. V každom ťahu pošle každá veverička polovicu svojich orieškov veveričke po svojej pravici. Ak má potom nejaká veverička nepárny počet orieškov, tak jej z neba<sup>2</sup> spadne ďalší. Takéto ťahy veveričky opakovali stále dookola, až kým nemali všetky rovnako veľa orieškov. Dokážte, že takáto hra určite niekedy skončí, bez ohľadu na to, aké bolo začiatkové rozmiestnenie orieškov.

#### Kategória BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Biliardová guľa bola alergická na oriešky, a tak sa radšej odgúľala späť do hotela, kde sa rozhodla, že zavolá svojej najlepšej priateľke, oranžovej bowlingovej guli. Stratila však papierik, na ktorom mala napísané telefónne čísla na všetky jej mobily.

#### Úloha č. 8:

Nájdite všetky 23-ciferné čísla  $n$ , ktoré spĺňajú nasledujúce vlastnosti:

- Číslo  $n$  nie je deliteľné jedenástimi.
- Žiadne číslo, ktoré vznikne z čísla  $n$  zmenou jedinej cifry, nie je deliteľné jedenástimi.

Čísla by už mala, ešte sa nejako dostať k telefónu a vytočiť. Pozrela sa do veľkého zrkadla na recepcii hotela Lexington a uvedomila si, že to nebude až také jednoduché. Telefón bol totiž na stolčeku — vysoko nad zemou.

#### Úloha č. 9:

Stolček má tvar štvorca so stranou 1 meter a sú na ňom dva kruhové obrusy s rovnakým polomerom. Tieto obrusy zakrývajú celý stolček. Zaujímalo by ma, aký najmenší môže byť polomer obrusov.

To je síce pekné, ale ako mi to pomôže dostať sa hore k telefónu? Pomyslela si biliardová guľa, keď ju zrazu niekto zdvihol a položil na stolček s obrusmi a telefónom. Jupí! Vytočila číslo a zo slúchadla sa ozval hlas jej priateľky:

#### Úloha č. 10:

V rovine je daných  $n$  bodov. Najväčšiu vzdialenosť medzi dvojicou z nich si označme  $d$ . Ukážte, že pre všetky  $n \geq 1$  vieme jeden z bodov odstrániť a zvyšné rozdeliť do dvoch skupín tak, aby najväčšia vzdialenosť medzi dvojicou bodov v rámci skupiny bola v oboch prípadoch menšia ako  $d$ .

Uff. Tak to bola najzvláštnejšia správa na odkazovači, akú som kedy počula.

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **24. február 2014** (pre zahraničie 21. február 2014)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

<sup>2</sup>tak to aspoň vyzeralo