Úloha 1. Koľko rôznych (nepodobných) trojuholníkov s celočíselnými stranami má obvod 7? Ktoré sú to?

Úloha 2. V Rúžovom kráľovstve sa platí mincami s hodnotami 3 a 7. Určte najvyššiu sumu, ktorá sa nedá pomocou týchto mincí zaplatiť bez vydávania. (Napríklad 6 sa dá zaplatiť pomocou dvoch mincí s hodnotou 3, ale 1 alebo 2 sa zaplatiť nedajú.)

Úloha 3. V cukrárni predávajú krémeše, venčeky a punčové rezy. Koľkými spôsobmi si vieme kúpiť práve 6 koláčov, ak chceme z každého druhu aspoň jeden kus, ale najviac dva venčeky?

Úloha 4. Máme päť červených kariet s číslami $1, 2, 3, 4, 5$ a štyri modré karty s číslami $3, 4, 5, 6$. Podarilo sa nám ich všetky zoradiť do jedného radu tak, že sa farby striedali a každé číslo na modrej karte bolo deliteľné číslami na susediacich kartičkách. Skúste to aj vy.

Úloha 5. Do štvorca s obsahom S_1 vpíšeme kružnicu k. Tejto kružnici vpíšeme rovnostranný trojuholník, ktorého obsah označíme S_2. Určte S_1/S_2.

Úloha 6. Nájdite všetky reálne čísla x také, že rovnica $8xy - 12y + 2x - 3 = 0$ platí pre každé y.

Úloha 7. Štvorcu $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm pripíšeme zvonku rovnostranné trojuholníky ABK, BCL, CDM a DAN. Nájdite obsah štvoruholníka $KLMN$.

Úloha 8. Nájdite najväčší násobok čísla 8, v ktorého desiatkovom zápise sú každé dve cifry rôzne.

Úloha 9. Pri ceste stoja dva stĺpy vysoké 4 a 6 metrov. Pridŕžajú ich dve laná, ktoré vedú z vrcholu jedného stĺpu ku spodku druhého. V akej výške sa tieto laná pretínajú? (Predpokladáme, že sú dobre napnuté.)

Úloha 10. Nájdite ciferný súčet čísla $25^{64} \cdot 32^{25}$.

Úloha 11. Škrečok, Mišáč a Ondráč vyhrali hromadu cukríkov, ktorú si majú rozdeliť v pomere $1 : 2 : 3$. Po cenu si však každý prišiel inokedy a každý si myslel, že je tam ako prvý. Tak si teda každý z nich zobral časť, ktorá mu podľa pomeru prislúchala. Aká časť cukríkov tam ostala?

Úloha 12. Katka a Dada si chvíle v Nórsku krátili rozprávaním o všetkom možnom. Keď už im došli nápady, začala Katka vymenúvať všetky dvojprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Dada si zakaždým napísala menšie z daných dvoch čísel, ktoré povedala Katka. Keď Katka skončila, Dada sčítala všetky čísla, ktoré mala napísané. Koľko jej vyšlo?

Úloha 13. Rovnica $x^2 + ax + b = 0$ má riešenia a, b. Nájdite všetky také dvojice a, b.

Úloha 14. Súčet niekoľkých (teda najmenej dvoch) po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých najväčšie je n, je 1000. Nájdite najväšiu možnú hodnotu n.

Úloha 15. Ajka s Bebem sa vo vlaku nudili a tak sa začali hrať. Na začiatku dali na kopu n zápaliek. Začína Ajka, potom sa v ťahoch striedajú. V jednom ťahu môže hráč buď pridať jednu alebo odobrať tri zápalky (majú dosť velkú zásobu zápaliek). Kto zoberie posledné zápalku, teda po koho ťahu na kope nič neostane, zvíťazí. Pre ktoré n môže Ajka vždy vyhrať nezávisle na ťahoch Bebeho?

Úloha 16. Z obdĺžnikového kusu papiera Janko odstrihol jeden roh, čím dostal skvelý päťuholník a úžasný trojuholník. Zistil, že strany jeho päťuholníka majú dĺžky 10, 17, 18, 24 a 39 v nejakom poradí. Viete zistiť, aké boli pôvodné rozmery papiera? Aké strany mal odstrihnutý trojuholník?

Úloha 17. Žabiak Ondráč vie preskočiť len celočíselné vzdialenosti. Raz skákal po úsečke AB dlhej 8^8 mm z bodu A do bodu B. Najprv skočil polovicu vzdialenosti, ktorá mu ostávala do bodu B. Ďalším skokom skočil polovicu dĺžky tohto skoku smerom naspäť. Potom pokračoval ako na začiatku, najprv polovicu vzdialenosti k bodu B a potom polovicu dĺžky tohto skoku naspäť. Koľko skokov urobil, kým musel zastať, lebo by musel skočiť o neceločíselnú vzdialenosť (vyjadrenú v milimetroch)?

Úloha 18. Nájdite najmenšie prirodzené číslo začínajúce číslicou 6, ktoré sa po odobraní tejto prvej číslice zmenší na dvadsaťpätinu?

Úloha 19. Pre koľko prirodzených čísel k platí $\mathrm{nsn}(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$?
$\mathrm{nsn}(a, b, c)$ značí najmenší spoločný násobok čísel a, b, c.

Úloha 20. Zjednodušte výraz

$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \cdots + n \cdot 3n \cdot 9n}}\,.$$

Úloha 21. Pre prirodzené čísla a, b, c platí $abc = 78$ a $a^2 + b^2 + c^2 = 206$. Zistite $a + b + c$.

Úloha 22. Škrečok si vybral päť čísel spomedzi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ a povedal Katke ich súčin. Katka sa snažila zistiť, či je ich súčet párny alebo nepárny. Po chvíli usúdila, že sa to zistiť nedá. Aké číslo povedal Škrečok Katke?

Úloha 23. Zuska má na internáte tajne ukryté tri skrinky, v každej dve zásuvky a v každej zásuvke jeden drahokam. V jednej skrini sú dva rubíny, v druhej jeden rubín a jeden smaragd a v poslednej dva smaragdy. Náhodne sme zvolili skrinku a v nej zásuvku. Ak sme v nej našli rubín, s akou pravdepodobnosťou bude rubín aj v druhej zásuvke?

Úloha 24. Koľko existuje štvorciferných čísel $abcd$ takých, že $0 < a < b < c < d \leq 9$?

Úloha 25. V rovnoramennom lichobežníku majú základne dĺžky 18 cm a 8 cm. Navyše viete, že lichobežníku sa dá vpísať kružnica. Zistite polomer tejto kružnice.

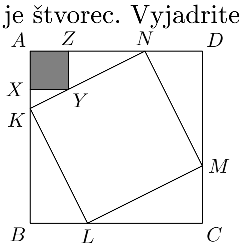
Úloha 26. Nájdite najväčšiu podmnožinu množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$ takú, že každé dva jej prvky sú nesúdeliteľné.

Úloha 27. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že číslo $6n$ je deliteľné číslom $6 + n$.

Úloha 28. Majme kružnicu k so stredom S a polomerom 1. Nech bod P je taký, že $|PS| = 3$. Týmto bodom veďme dotyčnice ku kružnici k, ktoré sa jej dotknú v bodoch A a B. Ďalej zvoľme ľubovoľný bod T na kratšom oblúku AB kružnice k a veďme ním taktiež dotyčnicu k danej kružnici. Táto dotyčnica pretne úsečky AP a BP v bodoch X a Y. Aký je obvod trojuolníka PXY?

Úloha 29. Na kocke vyznačíme niekoľko bodov: všetky vrcholy, stredy hrán, stredy stien a stred kocky. Koľko sme ich vyznačili? Koľko existuje priamok, ktoré prechádzajú práve dvoma vyznačenými bodmi?

Úloha 30. V štvorci $ABCD$ so stranou dĺžky 1cm je vpísaný štvorec $KLMN$ tak, že K leží na strane AB, L na BC, M na CD a N na DA. Bod X leží na úsečke AB, Y na KN a Z na DA tak, že $AXYZ$ je štvorec. Vyjadrite obsah štvorca $AXYZ$ ak viete, že S je obsah štvorca $KLMN$.



Úloha 31. Ako sa dá rozdeliť kruh na sedem obsahovo rovnakých častí len pomocou pravítka a kružidla?

Úloha 32. V trojuholníku ABC je ťažnica na stranu a kolmá na ťažnicu na stranu b. Naviac sa Hanke podarilo zistiť, že $a = 6$ a $b = 8$. Aká je veľkosť strany c?

Úloha 33. Nad preponou DO pravouhlého trojuholníka DOM leží zvonku štvorec $DINO$. Určte MI ak viete, že $|MD| = 6$ a $|MO| = 8$.

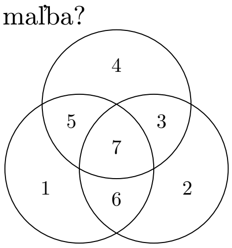
Úloha 34. Určte počet riešení rovnice

$$\sin(\pi x) = \frac{x}{100} \cdot$$

Úloha 35. Foto, Rúža a Feldo postupne hádžu mincou. Najprv hodí Foto, potom Rúža, nasleduje Feldo a potom opäť Foto a tak ďalej, pokiaľ prvému z nich padne hlava. Ten komu padla hlava vyhral. S akou pravdepodobnosťou vyhrá Rúža?

Úloha 36. Máme rovinu a v nej osem bodov, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Koľko najviac trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch vieme vytvoriť tak, že každé dva trojuholníky majú spoločný najviac jeden vrchol?

Úloha 37. Kubo a Paľo chceli na stenu namaľovať tri kruhy s polomermi veľkosti 1, ktorých stredy ležia vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 1. Vzniklo im sedem častí a každú chceli natrieť inou farbou. Ceny na natretie jednej štvorcovej jednotky sú znázornené na obrázku. Koľko bude stáť ich maľba?



Úloha 38. Vyčíslite $\sin 54° \cdot \sin 18°$.

Úloha 39. Funkcia $f(x)$ spĺňa $f(3x) = 3f(x)$ pre všetky reálne čísla x a $f(x) = 1 - |x-2|$ pre x z intervalu $[1,3]$. Nájdite najmenšie kladné číslo x, pre ktoré platí $f(x) = f(2008)$.

Úloha 40. Kúzelný automat dokáže zaplatiť čiastku n pomocou mincí v hodnote od 1 po n. Koľkými spôsobmi to vie urobiť, ak má všetkých mincí dostatok? Záleží nám aj na poradí, v ktorom mince vypláca.

Úloha 41. Nájdite najväčšie n také, že $2^n|(3^{1024}-1)$.

Úloha 42. Nech x je najväčšie dvojciferné prirodzené číslo, pre ktoré existujú celé číslo y a prvočíslo z a platí pre ne

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 5z^2.$$

Nájdite čísla x, y a z.

Úloha 43. Vieme, že pre reálne čísla a, b, c platí $a - 7b + 8c = 4$ a $8a + 4b - c = 7$. Aké hodnoty môže nadobúdať $a^2 - b^2 + c^2$?

Úloha 44. Nájdite prirodzené číslo n pre ktoré platí

$$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

Úloha 45. Uvažujme postupnosti písmen skladajúce sa len z A a B také, že každý maximálny sled po sebe idúcich písmen A má párnu dĺžku a písmen B má nepárnu dĺžku. Sú to napríklad $AABBB$, AA,B, $BAAAABBB$. Nájdite počet takýchto slov dĺžky 14.

Úloha 46. V trojuholníkovej tabuľke sú v prvom riadku čísla $1, 3, 5, \ldots, 99$. Každý ďalší riadok má o jedno číslo menej a jeho členy sú súčtami čísel, ktoré sú nad ním (teda druhý riadok je $4, 8, \ldots, 196$). Koľko čísel z trojuholníka je deliteľných 67?

Úloha 47. Nájdite počet osmíc nezáporných celých čísel $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ spĺňajúcich $0 \leq a_k \leq k$ pre $k = 1, 2, 3, 4$, a

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4 = 19.$$