



## Korespondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 36. ročníka Korespondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený seminár *iKS* (Medzinárodný korespondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami. Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

*vaši organizátori*

### Pravidlá KMS

#### Všeobecné informácie o korespondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

#### Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré príklady môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient  $\kappa$ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako  $\kappa = r + u + c$ , kde číslo  $r$  je tvoj ročník, číslo  $u$  je počet tvojich úspešných semestrov a číslo  $c$  je počet tvojich účasti na celoštátnom kole matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient  $\kappa$  je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

#### Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené príklady 1–7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 1$  a úlohu číslo 2 len študenti s  $\kappa \leq 2$ . Ostatné úlohy (3–7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

## Katégoria BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené príklady 4–10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 4$  a úlohu číslo 5 len študenti s  $\kappa \leq 7$ . Ostatné úlohy (6–10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

## Pozývanie na sústredenia

Po zimnej časti sa uskutočnia dve sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 30 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

Po letnej časti sa uskutoční *jedno* sústredenie spoločné pre obe kategórie. Z každej kategórie bude na sústredenie pozvaných aspoň 15 najúspešnejších riešiteľov. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

## Pokyny pre riešiteľov

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaš do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v  $\text{T}_\text{E}\text{X}$ u. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posielať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezapodni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

## Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke [kms.sk/eriesenia](http://kms.sk/eriesenia). Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť  $\text{T}_\text{E}\text{X}$ , prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke [kms.sk/eriesenia](http://kms.sk/eriesenia) je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 8. novembra 2014 (po Fyzikálnom Náboji). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke [klub.trojsten.sk](http://klub.trojsten.sk).

..... TU ODSTRIHNI!!! .....

Prihláška do zimnej časti KMS 2014/2015 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: ..... Dátum narodenia: .....  
Škola: ..... Trieda: .....  
Počet účastí na celoštátnom kole MO: .....  
Adresa domov: .....  
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): .....  
Tel. domov: ..... mobil(vlastný): .....  
e-mail: .....

**Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!**





celé ležia dnu v pravom uhle, majú fixný polomer 5 cm a ich dva krajné body ležia postupne na polpriamkach  $p$  a  $q$ . Nájdite množinu bodov, ktorú vyplnia body týchto polkružníc.<sup>1</sup>

### Kategória BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Mišo sa hrá na Spidermana a vyrobil si doma pavučinu. Tá pozostáva z  $3^n$  kamienkov, kde  $n$  je prirodzené číslo, pričom každá dvojica kamienkov je spojená práve jednou nitkou. Za chvíľu sa vrátia Mišovi rodičia, a tak potrebuje pavučinu rozplieť. Rozpletá ju nasledovným spôsobom: vyberie si trojicu kamienkov, medzi ktorými sú zatiaľ všetky tri nitky, a tieto tri nitky odstráni. Dokážte, že takýmto spôsobom vie postupne z pavučiny odobrať všetky nitky.

#### Úloha č. 9:

Hopko sa bol v lete potápať a na dne koralového útesu našiel štvorec. Chvíľu sa s ním hral, a potom si zaviedol názvoslovie.

Obdĺžnik nazval vystrihovací, ak sa dá vyrobiť zo štvorca pomocou strihania a preusporiadania kúskov.<sup>2</sup> Racionálne číslo nazval vystrihovacie, ak existuje vystrihovací obdĺžnik, ktorého pomer strán sa rovná tomuto racionálnemu číslu. Nájdite všetky vystrihovacie racionálne čísla.

#### Úloha č. 10:

Vodka má rád jednotky v binárnych zápisoch. Zaviedol značenie  $V(n)$ , ktoré udáva počet jednotiek v binárnom zápise prirodzeného čísla  $n$ . Prirodzené číslo  $n$  je pekné, ak  $V(n)$  delí  $n$ .

- Dokážte, že neexistuje päťica po sebe idúcich pekných prirodzených čísel.
- Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc po sebe idúcich pekných prirodzených čísel.

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **6. október 2014** (pre zahraničie 3. október 2014)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

<sup>1</sup>Body polkružnice sú iba body na jej obvode.

<sup>2</sup>Kúsky sa nesmú prekrývať, musia sa použiť všetky a môžeme ich nastrihať iba konečne veľa.

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2014/2015

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1: ( $\kappa \leq 1$ )

Stanka našla na povale 27 rôznych nepárnych prirodzených čísel. Navyše boli všetky menšie než sto. Dokážte, že medzi nimi vieme určite nájsť také dve rôzne čísla, ktorých súčet je 102. Ako by to bolo, keby Stanka našla iba 26 rôznych nepárnych čísel menších než sto?

#### Úloha č. 2: ( $\kappa \leq 2$ )

Vieme vyplniť štvorčeky v mriežke  $7 \times 7$  číslami 1 a  $-1$  tak, aby bol súčin čísel v každom riadku 1 a v každom stĺpci  $-1$ ? Vieme to isté spraviť v štvorci  $8 \times 8$ ?

#### Úloha č. 3: ( $\kappa \leq 3$ )

Jefo našiel v skrini starožitný lichobežník  $ABCD$  so základňami  $AB$  a  $CD$ . Priesečník jeho uhlopriečok bol označený  $X$ . Zachovalo sa o ňom niekoľko informácií. Dĺžka strany  $AB$  je šesť centimetrov, obsah trojuholníka  $CDX$  je jeden centimeter štvorcový a vzdialenosť bodu  $X$  od priamky  $AB$  je tri centimetre. Pomôžte Jefovi zahrať sa na historika a zistite obsah tohto lichobežníka.

#### Úloha č. 4: ( $\kappa \leq 4$ )

Vodkovi sa zunovalo hrať sa s hračkami, a tak sa začal hrať s číslami. Rozhodol sa nájsť všetky také dvojice kladných celých čísel  $(a, b)$ , že číslo  $a^b + b$  delí číslo  $a^{2b} + 2b$ . Vedeli by ste ich nájsť aj vy?

#### Úloha č. 5: ( $\kappa \leq 7$ )

Mišo má z papiera zlepený model pravidelného štvorstena. Rozhodnite, či môžeme model rozrezať pozdĺž troch úsečiek tak, aby ho potom bolo možné rozvinúť do roviny a vznikol pritom obdĺžnik. Existujú pre pravidelný štvorsten dva uvažované spôsoby rozrezania, pri ktorých vzniknú nezhodné obdĺžniky?

#### Úloha č. 6:

Linda si z roztopaše napísala výraz

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

Teraz by doňho chcela doplniť zátvorky<sup>3</sup> tak, aby dostala čo najmenej prirodzené číslo.<sup>4</sup> Ako to má spraviť a aké číslo dostane?

#### Úloha č. 7:

Dominika omylom vymkol vrátnik cez noc v škole, a tak si na tabuľu napísal výraz

$$2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + \dots + n^2,$$

kde  $n$  je prirodzené číslo väčšie než 2014. Ukážte, že existuje také  $n$ , pre ktoré dokážeme výmenou niektorých znamienok  $+$  za znamienko  $-$  zmeniť hodnotu výrazu na tabuľi na 2014.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Veronika sa vo voľných chvíľach zahráva s geometriou. Tá na ňu uvrhla nasledujúci problém a zakliala ju až do doby, kým ho niekto nevyrieši.

Diagonály  $AC$  a  $BD$  tetivového štvoruholníka<sup>5</sup>  $ABCD$  sa pretínajú v bode  $P$ . Bod  $O$  je stred opísanej kružnice  $ABP$  a  $H$  je priesečník výšok trojuholníka  $CDP$ . Odkľajte Veroniku a dokážte, že body  $H$ ,  $P$  a  $O$  ležia na jednej priamke.

#### Úloha č. 9:

Hopko si z Ameriky objednal šachovnicu s rozmermi  $7 \times 7$  a začal ju dláždiť, hneď ako ju dostal. K dispozícii mal dva typy dlaždičiek:  $S$ -ko zložené zo štyroch dlaždičiek a  $L$ -ko zložené z troch dlaždičiek.



<sup>3</sup>Zátvorky sa nedajú dopĺňať medzi cifry jedného čísla, vždy musia byť pred alebo za číslom.

<sup>4</sup>Pri časti bez zátvoriek delíme vždy zľava, napríklad  $12 : 6 : 2 = 1$ .

<sup>5</sup>Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica.

Dokážte, že ak chce Hopko takýmito dlaždičkami kompletne vydláždiť celú šachovnicu (bez prekryvov a bez kúskov vyčnievajúcich zo šachovnice), tak musí použiť práve jednu  $S$ -kovú dlaždičku.

#### Úloha č. 10:

Hago má na papieri nakreslené tri kružnice, ktoré majú rôzne veľkosti, žiadne dve sa nepretínajú ani nedotýkajú a žiadna z nich neleží v inej. Tieto kružnice však nemajú nakreslené svoje stredy. Hago by ich veľmi rád našiel, no má k dispozícii iba ceruzku<sup>6</sup> a euklidovské pravítko.<sup>7</sup> Vedeli by ste len pomocou týchto dvoch nástrojov nájsť stredy všetkých troch kružníc? Na papieri mu navyše ostali dve rovnobežky z predošlého príkladu.

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov: Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh  
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.  
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **3. november 2014** (pre zahraničie 31. október 2014)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

<sup>6</sup>Ceruzkou môžeme zaznačiť priesečníky, prípadne si vyznačiť náhodný bod na nejakom útvere — priamke, kružnici,...

<sup>7</sup>Euklidovské pravítko dokáže rýsovať priamky spájajúce dva rôzne body a overovať kolinearnosť bodov, viac na <http://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge>.