Počítanie uhlov

Tento text si kladie za cieľ ilustrovať základnú metódu používanú pri syntetickom riešení geometrických úloh — počítanie uhlov. Ukážeme si, že nestačí uhly počítať, treba to robiť systematicky a cieľavedome, aby sme sa dostali k výsledku. S tým má mnoho detí problémy, počítajú, počítajú, a nikam to nevedie. Súčasne si ukážeme, ako sa postupuje pri riešení rôznych geometrických úloh. Napríklad ako si sformulovať dokazované tvrdenie, aby sa ľahko dokazovalo. Začneme niekoľkými praktickými radami.

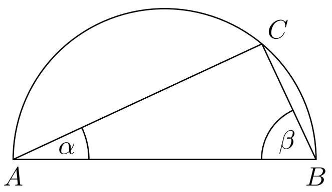
Keď dostaneme do rúk úlohu, prečítame si zadanie. Toto prvé prečítanie nám dá približný obraz o úlohe. Napríklad zistíme, že sa tam spomínajú kružnice a úloha je konštrukčná. Potom si zadanie prečítame ešte raz a tentoraz poriadne, dbáme na všetky detaily. Súčasne si popritom kreslíme obrázok, stačí náčrt. Keď sa niekde pomýlime, napríklad sa majú nejaké dve priamky pretnúť a nám akurát vyšli rovnobežné (lebo sme si nevhodne zvolili nejaké body), tak sa nebojíme začať kresliť odznova. Niektoré úlohy majú obrázok taký nepríjemný, že sa nám ho nepodarí nakresliť rukou. Vtedy neváhame použiť rysovacie pomôcky. Zrozumiteľný obrázok je dôležitý. Len málo úloh je takých, že si vieme všetko predstaviť aj bez obrázka. A so zlým obrázkom sa zle pracuje: keď tri body sú na priamke, tak nech aj na obrázku sú na priamke, inak na to zabudneme. Keď je niečo kružnica, tak to má patrične aj vyzerať, a nie ako nepodarený zemiak. Často treba obrázok skúmať a vytvárať si hypotézy, napríklad o kolmosti priamok. A ako si všimneme, že tie priamky sú na seba kolmé, ak na našom obrázku zvierajú uhol $70°$? Na druhej strane keď tri body *neležia* na priamke, ani na našom obrázku to tak nemá vyzerať, lebo potom to zvádza k chybným úvahám (založeným na nesprávnych predpokladoch).

Keď už máme dobrý obrázok, prečítame si zadanie znova. Tentokrát si k obrázku napíšeme všetky dôležité fakty, ktoré sa spomínajú v zadaní. Napríklad ktoré priamky sú na seba kolmé, že BD je osou uhla ABC a podobne. Pre kolmosť priamok či rovnobežnosť máme dohodnuté značky, ktoré sa dajú kresliť do obrázka, určite ich poznáte. Takisto si treba niekam napísať, ktoré body ako vznikli, napríklad, že M je priesečník priamky AB s priamkou CD. A nakoniec si rozmyslíme a poznamenáme na papier, čo od nás v úlohe chcú. Dokázať niečo? Nájsť množinu bodov? Zostrojiť niečo? Niekedy je v zadaní chyba alebo mu nerozumieme. Treba sa spýtať toho, kto nám úlohu zadal, alebo skúsiť zadanie opraviť, nie uspokojiť sa s triviálnym pozorovaním, že tvrdenie, ktorého dôkaz požadujú, neplatí.

Máme za sebou prvú fázu riešenia. Je dôležitá a nevynechávajú ju ani skúsení riešitelia. Bez nej nevieme, o čo v úlohe ide a ťažko môžeme niečo riešiť. A tí z vás, ktorí si už niekedy zle prečítali zadanie a potom dostali 0 bodov, určite vedia, prečo sa oplatí správnemu pochopeniu zadania venovať dostatok času.

V jednoduchých úlohách po tejto fáze už aj vieme, čo robiť a akým spôsobom postupovať. Čo však, keď úloha je pre nás nová a zatiaľ sme sa s podobnou nestretli? Ukážeme si jednu z možností, ako postupovať. Budeme počítať uhly. A to nie hocijako, ale tak, aby sme úlohu vyriešili. Táto metóda nám často pomôže, ale nie je všemocná. Neskôr si ukážeme niekoľko príkladov, keď sa uhly počítať nedajú.

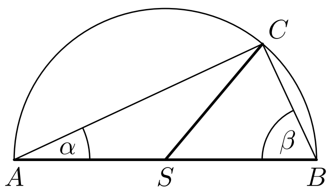
Príklad 1. Daná je polkružnica k s priemerom AB. Nech C je ľubovoľný bod na tejto polkružnici rôzny od bodov A, B. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.



Máme danú kružnicu, jej priemer AB a bod C. To všetko máme nakreslené na obrázku. Body A, B, C neležia na priamke kvôli podmienke zo zadania a preto ABC je naozaj trojuholník. Je pravouhlý? Ešte nevieme, ale budeme vedieť na túto otázku odpovedať, keď budeme poznať jeho vnútorné uhly. Zatiaľ o nich nevieme nič. Označme si uhol veľkosť uhla CAB ako α, veľkosť uhla CBA nech je β. Čo vieme o týchto uhloch povedať? Môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty? Nuž, nech $\alpha = 30°$. Potom bod C leží na polpriamke, ktorá s priamkou AB zviera uhol $30°$. Táto polpriamka však pretne polkružnicu k v jedinom bode, takže bod C je jednoznačne určený. Ale potom aj uhol CBA je jednoznačne určený. Túto úvahu vieme zopakovať pre hocijakú veľkosť uhla α. A navyše ju vieme aj obrátiť: začneme uhlom β a pre veľkosť uhla α dostaneme jedinú hodnotu. Takže medzi uhlami α a β je nejaká skrytá zákonitosť, ktorej presné odhalenie by mohlo viesť k výsledku.

Čo máme dokázať? Že trojuholník ABC je pravouhlý. Uhly α a β sú ostré, je to jasné z obrázka. Podrobnejšie zdôvodnenie môžeme založiť na tom, že polkružnica k leží okrem bodov A, B celá vnútri pásu určeného dotyčnicami ku k v bodoch A, B. (Tieto dotyčnice sú kolmé na priamku AB. Nakreslite si to.) Bod C je na k, teda tiež vnútri tohto pásu.

Takže jediný uhol, ktorý by mohol byť pravý, je uhol pri vrchole C. Jeho veľkosť γ vieme určiť z toho, že súčet uhlov v trojuholníku ABC je $180°$. Jednoduchou úpravou dostaneme, že $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Ale zatiaľ nevieme, či toto je $90°$ alebo nie.



Predsa potrebujeme odhaliť ten vzťah medzi uhlami α a β. Keď sa vrátime k úvahe o tomto vzťahu, všimneme si, že súvisí s tým, že bod C leží na polkružnici k. Čo to znamená? Kružnica je množinou bodov rovnako vzdialených od jej stredu. Označme teda ten stred S. Keďže AB je priemer, je bod S aj stredom úsečky AB. A teraz vieme, že $SA = SB = SC$, lebo C leží na kružnici k. To si zaslúži nový obrázok, na ktorom tieto rovnaké vzdialenosti zvýrazníme hrubšou čiarou.

Na obrázku sú dva rovnoramenné trojuholníky. Vidíte ich? Boli tam aj doteraz, lenže uvedomiť si to a napísať na papier medzi zistené veci je ďalším krokom v riešení. Rovnoramenný trojuholník má rovnaké uhly pri základni. Nakreslíme do obrázka. Určite si kreslíte na papier vlastný, takže to zvládnete aj sami. A čo sme zistili? Že veľkosť uhla pri vrchole C je rovná $\alpha + \beta$. Ale my už o tejto veľkosti čosi vieme, $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Takže máme rovnicu

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - \gamma.$$

Rozmyslite si, odkiaľ sa táto rovnosť zobrala. Z nej ľahko dopočítame veľkosť uhla $\gamma = 90°$ a aj vzťah $\alpha + \beta = 90°$, ktorý sme tušili už od začiatku.

Videli sme, že počítanie uhlov nám pomohlo. Nerobili sme to však bezhlavo. Skúsme si zhrnúť pravidlá, podľa ktorých sa pri rátaní uhlov zvyčajne riadime.

1. Uhly označujeme písmenkami, zvyčajne gréckymi: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \varepsilon, \omega, \ldots$ Keď vieme, že dva uhly majú rovnakú veľkosť, označíme ich rovnakým písmenom. Nezaškodí niekam napísať, prečo sú rovnaké.

2. Kreslíme si veľký obrázok. Aby bol prehľadný a aby bolo dosť miesta na všetky veci, ktoré tam neskôr budeme chcieť doplniť, napríklad zistené veľkosti uhlov.

3. Nepotrebujeme do obrázka písať veľkosti všetkých uhlov, ktoré vieme vypočítať. Napríklad z dvoch vrcholových uhlov stačí napísať veľkosť len k jednému. Pomáha to udržať si prehľad o tom, čo vlastne robíme. Keď ideme skúsiť niečo nové, nebojme sa nakresliť si nový obrázok. Staré pokusy by len odvádzali našu pozornosť. Na starý obrázok sa môžeme pozrieť kedykoľvek, keď to bude potrebné.

4. Uhly rátame len vtedy, keď to vyzerá nádejne. Mnoho vecí sa dá vyjadriť v reči uhlov. Napríklad rovnoramennosť trojuholníka, os uhla, kolmosť či rovnobežnosť dvoch priamok, podobnosť trojuholníkov. Aj to, že tri body A, B, C ležia na priamke, to nastáva vtedy, keď uhol ABC je priamy (má veľkosť $180°$). Rozmyslite si, ako pomocou uhlov popíšete tieto situácie. Napadá vás aj nejaká iná, ktorá sa dá popísať uhlami?

Pokiaľ na obrázku nič takéto nie je, tak ani uhly nemá zmysel počítať, veď o ich veľkostiach nebudeme vedieť povedať takmer nič. Dobrým príkladom je uhol, ktorý zviera ťažnica s protiľahlou stranou. Ten pomocou vnútorných uhlov tohto trojuholníka vyjadriť nijako pekne nevieme. (Narysujte si niekoľko trojuholníkov, ktorých vnútorné uhly sú „pekné“ a odmerajte uhol medzi ťažnicou z nejakého vrchola a protiľahlou stranou. Čo ste zistili?)

5. Uhol označíme (resp. pripíšeme veľkosť) len vtedy, keď to potrebujeme. Nové písmenko na označenie uhla zavedieme len vtedy, keď máme dobrý dôvod. Uvedieme si tri známe dobré dôvody.

a) Uhol je nezávislý na veľkostiach doteraz označených uhlov. Všimnime si ten príklad o polkružnici a pravouhlom trojuholníku. Uhol ASB je priamy. Keď teraz pridáme do obrázka bod C, uhol CAB nezávisí od veľkosti žiadneho z uhlov, ktoré boli na obrázku doteraz. Môžeme vhodnou voľbou bodu C dosiahnuť, že bude mať ľubovoľnú veľkosť z istého intervalu. Preto na jeho veľkosť potrebujeme nové písmenko, neexistuje žiaden vzťah, pomocou ktorého by sme vedeli túto veľkosť vypočítať z už známych uhlov.

b) Uhol síce je závislý, ale nevieme ho dobre vyjadriť. Toto napríklad nastane po označení veľkosť uhla CAB písmenom α. Vieme, že veľkosť uhla β už je určená, keď poznáme veľkosť α, ale túto závislosť zatiaľ presne nepoznáme. Podobne je to s tým uhlom pri ťažnici. Pre daný trojuholník ABC s veľkosťami vnútorných uhlov α, β, γ je síce jeho ťažnica aj uhol pri nej jednoznačne určená, ale my jeho veľkosť pomocou α, β, γ vyjadriť nevieme. Preto ak chceme jeho veľkosť použiť ďalej vo výpočtoch, treba ju označiť novým písmenkom.

c) Uhol vieme vyjadriť, ale vyjadrenie je zložité či neprehľadné. Napríklad označíme tretí uhol v trojuholníku γ namiesto $180° - \alpha - \beta$, aby sme mali stručnejšie všetky zápisy, ktoré sa tohto uhla týkajú.

Pri počítaní uhlov si treba dávať pozor na to, že situácia nemusí vyzerať vždy tak, ako ju máme nakreslenú. Môže sa stať, že body ležia na priamke či kružnici v inom poradí, nie tak, ako máme na obrázku. Potom niektoré uhly sú záporné, napríklad keď máme trojuholník s vnútornými uhlami α, β a nejaké ďalšie uhly, medzi nimi uhol s veľkosťou $\alpha - \beta$. To znamená, že náš obrázok verne zachytáva situáciu iba vtedy, keď $\alpha > \beta$. Pre $\alpha = \beta$ a $\alpha < \beta$ si musíme nakresliť iné obrázky a skontrolovať, či náš dôkaz funguje aj tam.

Ďalej si dokážeme niekoľko dôležitých tvrdení, na ktorých je založená metóda počítania uhlov.

Príklad 2. Nech k je kružnica opísaná trojuholníku ABC. Potom pre bod X ležiaci vnútri polroviny ABC platí $|\angle AXB| = |\angle ACB|$ práve vtedy, keď bod X leží na kružnici k.

Čo vlastne hovorí toto tvrdenie? Máme dané dva body A, B a kružnicu k, ktorá nimi prechádza. Táto kružnica je určená jej stredom, ktorý leží na osi úsečky AB. Uvažujme bod X vnútri tej z polrovín určených priamkou AB, v ktorej leží stred kružnice k. O bode X vieme iba to, že leží na kružnici k. Bod X leží na kružnici k práve vtedy, keď $|XS| = |AS|$. Tvrdenie, ktoré chceme dokázať, hovorí, že za podmienky $|XS| = |AS|$ veľkosť uhla AXB nezávisí od polohy bodu X. Toto teraz dokážeme.

Čo chceme dokázať? Že uhol AXB sa nemení, keď bod X posúvame po kružnici. Inak povedané, veľkosť uhla AXB závisí len od tej kružnice k. Táto kružnica je určená uhlom ASB (lebo bod S leží na osi úsečky AB). Vieme z veľkosti tohoto uhla odvodiť veľkosť uhla AXB?

Bod X je viazaný podmienkou $|SX| = |SA| = |SB|$. Preveďme toto do reči uhlov: trojuholníky ASX, BSX, BSA sú rovnoramenné. Nakreslime si tieto trojuholníky do obrázka. (Toto je podstatná vec pre Ďalší postup.) Označme veľkosti uhlov AXS, BXS v tomto poradí α, β. Prečo? No chceme zistiť veľkosť uhla AXB a ten sa skladá z dvoch častí. Zo spomínanej rovnoramennosti vieme, že uhly XAS, XBS majú veľkosti α, β. Nakreslíme do obrázka (vlastného). Čo chceme? Nejakú súvislosť medzi uhlami α, β a veľkosťou uhla ASB. Uhly ASB, ASX a BSX spolu vytvoria plný uhol, takže stačí zistiť veľkosti uhlov ASX a BSX. Ale tie predsa poznáme z trojuholníkov ASX, BSX. Jednoduchý výpočet nám povie, že

$$|\angle ASB| = 360° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) = 2|\angle AXB|.$$

Takže uhol AXB má polovičnú veľkosť oproti uhlu ASB. K dokončeniu dôkazu potrebujeme zdôvodniť, prečo žiaden bod ležiaci mimo kružnice nemá túto vlastnosť. To je jednoduché. Nech X leží mimo kružnice (a nie vnútri kruhu určeného touto kružnicou). Potom aspoň jedna z úsečiek AX, BX pretína kružnicu k v bode X', nech je to (bez ujmy na všeobecnosti) úsečka AX (rozmyslite si to, využívame, že body S a X ležia v tej istej polrovine určenej priamkou AB). Pre bod X' platí, že veľkosť uhla $AX'B$ je polovica veľkosti uhla ASB. Ale uhol AXB je menší ako uhol $AX'B$, pretože platí $|\angle AX'B| = |\angle AXB| + |\angle X'BX|$. Takže uhol AXB nemôže mať veľkosť polovice uhla ASB. Pre vnútorný bod X zase dostaneme, že uhol AXB je väčší ako polovica uhla ASB (spravte si to podrobne). Našli sme teda kritérium, ktoré hovorí, ako pomocou uhla určíme, či bod leží vnútri kruhu, na jeho hranici, alebo mimo kruhu.

A čo sa stane, keď body X, S ležia v rôznych polrovinách určených priamkou AB?

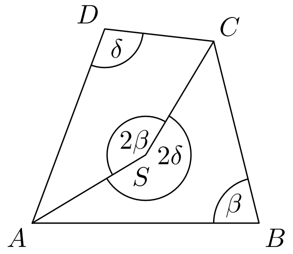
Dobre si rozvážte všetky veci, ktoré robíme. Treba dokázať dve tvrdenia: „ak bod X leží na kružnici k, tak uhol AXB má istú veľkosť" a opačné tvrdenie „ak uhol AXB má istú veľkosť, tak bod X leží na kružnici k". Namiesto druhého tvrdenia dokážeme, že „ak bod X neleží na kružnici k, tak uhol AXB nemá istú veľkosť". Tieto dve tvrdenia sú buď obe pravdivé, alebo obe nepravdivé, rozmyslite si to. Prečo to robíme takto? Pretože pri dôkaze druhého tvrdenia už môžeme využiť prvé dokázané tvrdenie (v našom prípade to je pri určení veľkosti uhla $AX'B$). Tento postup sa v matematike používa často.

Všimnite si, že samotný dôkaz podstaty tvrdenia je krátky, zvyšok tvorí diskusia a rozbor prípadov. Je potrebné rozoberať spomínané prípady?

Príklad 3. Vrcholy štvoruholníka ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď súčet jeho protiľahlých uhlov je rovný priamemu uhlu.

Štvoruholník, ktorého vrcholy ležia na jednej kružnici (dá sa mu opísať kružnica), sa nazýva *tetivový* — jeho strany sú tetivami kružnice. Predoľlá úloha hovorí o jednom z kritérií, ktoré umožňuje určiť, či štvoruholník je tetivový alebo nie. Štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď uhly ACB a ADB majú rovnakú veľkosť. Samozrejme, tetiva AB nie je ničím význačná, rovnako môžeme skúmať rovnosť uhlov nad inou stranou štvoruholníka $ABCD$.

V našom príklade máme dokázať iné kritérium, hovoriace o súčte protiľahlých uhlov. Keďže súčet uhlov v štvoruholníku je $360°$ (prečo?), je jedno, ktorú dvojicu protiľahlých uhlov vezmeme — ak jedna z nich má súčet $180°$, tak má takýto súčet aj druhá dvojica.



Majme štvoruholník $ABCD$ vpísaný do kružnice. Označme stred tejto kružnice S. Zaujímajú nás veľkosti uhlov ABC a ADC, označme si ich teda β a δ. Potom vieme porátať podľa predošlého príkladu uhly pri bode S (obrázok) — využívame, že vrcholy štvoruholníka $ABCD$ ležia na kružnici. Je jasné, že $2\beta + 2\delta = 360°$, preto $\beta + \delta = 180°$.

Ostáva druhá implikácia: ak $\beta + \delta = 180°$, tak body A, B, C, D ležia na kružnici. Skúste to spraviť sami, dobré je začať tým, že trojuholníku ABC opíšeme kružnicu (prečo existuje práve jedna?).

Príklad 4. V rovine je daný trojuholník ABT. Nech k je kružnica opísaná tomuto trojuholníku. Nech M je bod ležiaci v polrovine opačnej k ATB. Dokážte, že priamka MT je dotyčnicou ku kružnici k práve vtedy, keď uhly MTA a ABT majú rovnakú veľkosť.

Riešenie samozrejme začneme tým, že si nakreslíme obrázok. Opäť sa dokazované tvrdenie skladá z dvoch implikácií. Skúsme sa pozrieť prvú z nich: nech MT je dotyčnica, aký je uhol MTA? Označme jeho veľkosť φ. Ako vieme pomocou uhlov popísať, že MT je dotyčnica? Áno, máte pravdu, je kolmá na polomer ST kružnice k so stredom S. Využijúc toto preformulovanie predpokladu dostávame, že uhol STA má veľkosť $90° - \varphi$ (vpisujte si veľkosti uhlov do obrázka). Je podstatné, že S je stred kružnice — vyplýva z toho rovnoramennosť trojuholníka STA, z čoho vieme, že uhol AST má veľkosť 2φ. Prečo sa zaoberáme týmto uhlom? To je jasné, jeho veľkosť je dvojnásobná oproti uhlu ABT (dokázali sme si pred chvíľou). Inak povedané, uhol ABT má veľkosť φ, a teda rovnakú ako uhol MTA.

Druhá implikácia hovorí, že ak uhly MTA a ABT majú rovnakú veľkosť, tak MT je dotyčnica ku k v bode T. Toto dokážeme sporom, využijeme pri tom pred chvíľou dokázanú prvú implikáciu. Predpokladajme, že dotyčnica ku kružnici k v bode T neprechádza bodom M, ale pritom uhly MTA a ABT majú rovnakú veľkosť. Na dotyčnici ku k v bode T leží teda nejaký bod M', pre ktorý platí $|\angle M'TA| = |\angle ABT|$ (toto hovorí predošlá implikácia). Takže uhly $M'TA$ a MTA majú rovnakú veľkosť, čo znamená, že bod M leží na priamke MT'. To je spor (s čím?).

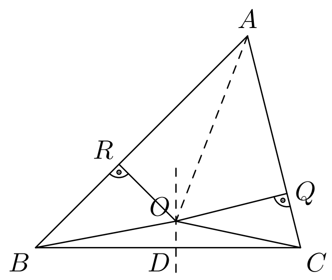
Ukážeme si ešte jeden spôsob dôkazu prvej implikácie. Chceme dokázať, že uhol ABT má rovnakú veľkosť ako uhol MTA. Všetky uhly na oblúku ABT majú rovnakú veľkosť, preto stačí uvažovať bod B' taký, že $B'T$ je priemer kružnice k. Dokončite tento dôkaz sami, stačí porátať uhly.

Predchádzajúci príklad ukazuje efektívny popis dotyčnice pomocou uhla MTA, ktorý sa nazýva *úsekový*. Môžeme pracovať s dotyčnicami bez toho, aby sme si dokresľovali stred kružnice. Vyskúšajte si to:

Úloha 1. Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB, CD a nech M je priesečník priamok AD a BC. Vnútri úsečky AB sa nachádza taký bod E, že kružnice opísané trojuholníkom ADE a BCE sa dotýkajú. Dokážte, že body C, M, D, E ležia na jednej kružnici.

Nasledujúci príklad ukazuje, prečo je dôležitá diskusia a skúmanie poradia bodov na priamke či kružnici.

Príklad 5. Dokážeme, že každý trojuholník je rovnoramenný. Máme trojuholník ABC. Označme D stred strany BC a O priesečník osi uhla z vrchola A s osou strany BC. Body R, Q nech sú po rade päty kolmíc z bodu O na strany AB, AC. Bod O leží na osi strany BC, preto $|BO| = |CO|$. Bod O leží aj na osi uhla BAC, preto $|OR| = |OQ|$. Takže pravouhlé trojuholníky ORB a OQC sú zhodné. Potom $|RB| = |QC|$. Navyše $|AR| = |AQ|$ (priamka AO je osou uhla RAQ). Takže



$$|AB| = |AR| + |RB| = |AQ| + |QC| = |AC|.$$

Kde je chyba? Čo by nám pomohlo vyhnúť sa jej?

A teraz si na niekoľkých príkladoch ilustrujeme, ako sa tie uhly počítajú.

Úloha 2. Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I (v angličtine sa tento bod nazýva *incenter*). Os strany AB, os uhla CAB a kružnica opísaná trojuholníku ABC sa pretínajú v jednom bode. Označme tento bod M. Dokážte, že M je stred kružnice opísanej trojuholníku ABI.

Označme k kružnicu opísanú trojuholníku ABC. Začneme prvou časťou: nejaké dve priamky a kružnica sa majú pretínať v jednom bode. Máme tri možnosti, ako si sformulovať dokazované tvrdenie:
1. Nech M je priesečník kružnice k a osi strany AB. Dokážeme, že uhly ACM a BCM sú rovnaké.
2. Nech M je priesečník kružnice k a osi uhla ACB. Dokážeme, že $|AM| = |MB|$ (v reči uhlov: trojuholník AMB je rovnoramenný, máme dokázať rovnosť dvoch uhlov pri základni AB).
3. Nech M je priesečník osi strany AB a osi uhla CAB. Dokážeme, že bodom M prechádza aj kružnica k.

Vyskúšajte si vyriešiť každú z troch úloh, ktoré takto vzniknú. Najťažšia je tretia z nich. Riešenie nájdete vzadu.

Ostáva druhá časť úlohy. Dokazované tvrdenie vieme ľahko formulovať v reči uhlov. Čo je kružnica? Množina bodov rovnako vzdialených od stredu. V našom prípade chceme teda dokázať, že úsečky SA, SB, SI majú rovnakú veľkosť. Inak povedané, trojuholníky ASB, ASI, BSI sú rovnoramenné. Dokončte dôkaz sami.

Príklad 6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC a vnútri neho bod C'. Bod B' je taký, že trojuholníky ABC a $AB'C'$ sú podobné. Nech P je priesečník priamok BB' a CC'. Dokážte, že body A, B, C, P ležia na kružnici.

Trojuholníky ABC a $AB'C'$ sú v istom zmysle zameniteľné: niet dôvod preferovať niektorý z nich. Preto ak A, B, C, P ležia na kružnici, tak aj A, B', C', P ležia na kružnici a naopak. Bod P by mal byť teda priesečníkom kružníc opísaných trojuholníkom ABC a $AB'C'$. Pri predošlej úlohe bolo jednoduchšie mať pri rátaní uhlov kružnice a dokazovať niečo o priamkach (porovnaj 1., 2. a 3.), vyskúšame to aj teraz. Nech P je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABC a $AB'C'$; dokážeme, že bodom P prechádza priamka BB' (zo symetrie je jasné, že potom ním prechádza aj priamka CC'). Uhol APB má veľkosť $180° - |\angle ACB|$, uhol APB' má veľkosť ako uhol $AC'B'$ a teda takú ako uhol ACB. Dokopy máme, že uhol BPB' je priamy.

Metódu práce odzadu (využitú pri predošlej úlohe) si môžete vyskúšať na nasledujúcej:

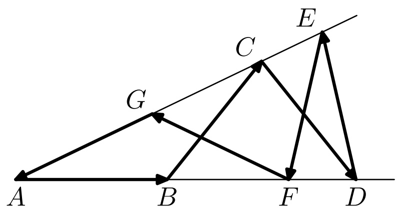
Úloha 3. Daný je trojuholník ABC a na jeho strane AB bod D taký, že $|CD| = |AB|$ a uhly ABD a ACB majú rovnakú veľkosť. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode E. Dokážte, že priamky AB a DE sú rovnobežné.

Na nasledujúcich úlohách si môžete samostatne vyskúšať počítanie uhlov. Nevzdávajte sa, bojujte s úlohou, ak sa vám nedarí, pozrite si, či sa nehodí niektoré z tvrdení o uhloch, ktoré sme už dokázali, alebo niektorá z ilustrovaných dôkazových metód. Na konci sú stručné riešenia alebo návody k úlohám.

Úloha 4. Daný je trojuholník ABC. Body P, Q, R ležia vnútri úsečiek BC, CA, AB. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ARQ, BPR, CQP majú spoločný bod.

Úloha 5. Nech E, F sú po rade stredy strán CD, DA v obdĺžniku $ABCD$. Označme G priesečník priamok AE a CF. Dokážte, že uhly EGC a EBF majú rovnakú veľkosť.

Úloha 6. Daný je trojuholník ABC taký, že $|AC| > |AB|$ a $|\angle ABC| - |\angle ACB| = 30°$. Na jeho strane AC vyznačme bod D tak, aby platilo $|AB| = |AD|$ (bod D leží na úsečke AC). Pokúste sa (aj bez znalosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC) zistiť veľkosť uhla CBD.



Úloha 7. Blška skáče po dvoch ramenách uhla ako na obrázku. Všetky jej skoky sú rovnakej dĺžky. Začína z vrcholu uhla a po siedmych skokoch sa vráti naspäť do tohto vrcholu. Aká je veľkosť uhla?

Úloha 8. Na strane AB obdĺžnika $ABCD$ si zvoľme bod F. Os úsečky AF pretína uhlopriečku AC v bode G. Úsečky FD a BG sa pretínajú v bode H. Dokážte, že trojuholníky FBH a GHD majú rovnaký obsah.

Úloha 9. V trojuholníku ABC delí ťažnica AM uhol BAC tak, že platí $2\,|\angle BAM| = |\angle CAM|$. Na priamke AM si vyznačme ako D taký bod, že uhol DBA je pravý. Dokážte, že potom platí $2\,|AC| = |AD|$.

Úloha 10. Nech v lichobežníku $ABCD$ platí $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, $AC \perp BD$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a E priesečník priamok OB a CD. Dokážte, že platí rovnosť $|BC|^2 = |CD| \cdot |CE|$.

Úloha 11. Daný je lichobežník $ABCD$ taký, že $|BC| = |CD| = |DA|$, $AB \parallel CD$ a $|\angle DAB| = 36°$. Bod K leží na úsečke AB a platí preň $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a BKC sa dotýkajú.

Úloha 12. Dokážte, že obrazy priesečníka výšok v osových súmernostiach podľa jednotlivých strán trojuholníka ležia na opísanej kružnici.

Úloha 13. Daný je trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Vezmime tri kružnice so stredmi v bodoch A, B, C, ktoré prechádzajú bodom V. Dokážte, že druhé priesečníky týchto kružníc (rôzne od bodu V) ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

Úloha 14. V rovine sú dané tri zhodné kružnice prechádzajúce bodom H. Označme A, B, C druhé priesečníky týchto kružníc (rôzne od bodu H). Dokážte, že H je priesečníkom výšok trojuholníka ABC a že kružnica opísaná trojuholníku ABC je zhodná s tými danými troma kružnicami.

Úloha 15. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s navzájom kolmými uhlopriečkami pretínajúcimi sa v bode P. Dokážte, že obrazy bodu P v osovej súmernosti podľa strán štvoruholníka $ABCD$ vytvoria tetivový štvoruholník.

Úloha 16. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod rovnostranného trojuholníka ABC. Uvažujme obrazy D, E, F bodu P v osových súmernostiach s osami BC, CA, AB. Určte množinu všetkých bodov P takých, že trojuholník DEF je rovnoramenný.

Úloha 17. Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na kružnici.

Úloha 18. Dokážte, že všetky stredy strán a päty výšok trojuholníka ABC ležia na jednej kružnici (táto kružnica sa nazýva *Feuerbachova*).

Úloha 19. Daný je trojuholník ABC a bod P v jeho rovine. Nech D, E, F sú päty kolmíc z bodu P na priamky BC, CA, AB. Dokážte, že bod P leží na opísanej kružnici trojuholníka ABC práve vtedy, keď body D, E, F ležia na priamke. (Priamka DEF sa nazýva *Simsonova*.)

∗ **Úloha 20.** Nech PQ je priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že Simsonove priamky (pozri predošlú úlohu) zodpovedajúce bodom P a Q sú na seba kolmé a pretínajú sa na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC.

∗ **Úloha 21.** Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s uhlom $60°$ pri vrchole B. Dokážte, že ak $|BC| = |CD|$, tak $|CD| + |DA| = |AB|$. Rozhodnite, či platí opačná implikácia.

Úloha 22. V trojuholníku ABC platí $|\angle ABC| = 120°$. Nad stranami AB, BC sú (zvonku) zostrojené rovnostranné trojuholníky ABP a BCR. Stredy strán AB a BC označme M a K. Zostrojme ešte jeden rovnostranný trojuholník MKQ tak, že body B a Q budú ležať v rovnakej polrovine určenej priamkou MK. Dokážte, že body P, Q, R ležia na jednej priamke.

Úloha 23. V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) stredná priečka rovnobežná so stranou BC pretne vpísanú kružnicu trojuholnika ABC v bode F, ktorý neleží na základni AC. Dokážte, že dotyčnica ku vpísanej kružnici v bode F pretne os uhla ACB na strane AB.

∗ **Úloha 24.** Kružnice so stredmi O a O' sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka TT' sa dotýka prvej kružnice v bode T a druhej v bode T'. Päty kolmíc spustených z bodov T a T' na priamku OO' označme S a S'. Polpriamka AS pretína prvú kružnicu znova v bode R a polpriamka AS' druhú kružnicu znova v bode R'. Dokážte, že body R, B a R' ležia na jednej priamke.

1. Riešenia úloh

1. Nech bod K leží v polrovine ABM na spoločnej dotyčnici kružníc zo zadania (tá prechádza bodom E). Potom pre veľkosti uhlov platí

$$DMC + DEC = DMC + DEK + KEC = DMC + DAE + CBE = 180°.$$

2. Ukážeme si iba riešenie tretej časti. Nech B' je bod súmerný s bodom B podľa osi uhla ACB. Zrejme B' leží na priamke AC a trojuholník AMB' je rovnoramenný. Pre veľkosti uhlov platí

$$CBM = CB'M = 180° - AB'M = 180° - CAM,$$

čo znamená, že body A, C, B, M ležia na kružnici. Ako sme to vlastne dokázali? Využívame symetriu priamok CA, CB podľa osi uhla. Hodí sa to aj v iných prípadoch:

Nech ABC je trojuholník a D je priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Zistite veľkosť pomeru AD/BD.

Náčrt riešenia: nech B' je obraz bodu B v osovej súmernosti podľa a nech B'' je bod na priamke CD taký, že $B'D = B'B''$. Potom $B'B'' \parallel AB$.

3. Nech F je bod na úsečke BC taký, že $AB \parallel DF$. Dokážte, že AF je osou uhla BAC. Všímajte si dvojice rovnakých uhlov a úsečiek.

Úloha má aj priamočiare riešenie založené na počítaní pomerov, využívame dvojice podobných trojuholníkov.

4. Nech M je spoločný bod kružníc opísaných trojuholníkom ARQ a BRP rôzny od bodu R (ak taký neexistuje, úlohu vyriešime analogicky ako predošlú). Ukážeme, že body C, P, M, Q ležia na kružnici. Stačí porátať uhly; pri určení veľkostí uhlov QMR a PMR využijeme, že $ARMQ$ a $BRMP$ sú tetivové štvoruholníky.

5. Všetky veľkosti uhlov sa dajú vyjadriť pomocou veľkostí uhlov ABF a CBE. Existuje však aj elegantnejšie riešenie: situácia je symetrická podľa osi úsečky AB. Čo je obrazom uhlov, ktoré porovnávame?

6. Dvoma spôsobmi určíme veľkosť uhla CBD: ako rozdiel veľkostí uhlov ABC a ABD a z trojuholníka BCD.

8. Namiesto toho, aby sme dokazovali, že obsahy trojuholníkov FBH a GHD sú rovnaké, stačí dokázať, že obsahy trojuholníkov GFD a GFB sú rovnaké. Tieto dva trojuholníky majú spoločnú stranu GF, teda stačí ukázať, že majú rovnakú výšku na túto stranu a už budú mať rovnaký obsah. To ale znamená, že nám stačí ukázať, že FG je rovnobežné s BD. Označme $|\angle CAB| = \alpha$. Pretože platí $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, vidíme, že $|\angle DBA| = |\angle CAB|$. Trojuholník AFG je rovnoramenný a preto $|\angle GFA| = |\angle GAB| = |\angle CAB| = |\angle DBA| = \alpha$. Zo zhodnosti uhlov sme tak dostali $GF \parallel BD$. Teda výška trojuholníka GFD na stranu GF a výška trojuholníka GFB na stranu GF sa rovnajú, preto sú obsahy trojuholníkov GFB a GFD rovnaké. Nakoniec dostaneme $S_{GFB} - S_{GFH} = S_{GFD} - S_{GFH} \iff S_{FBH} = S_{GHD}$.

9. Nech S je stred Tálesovej kružnice nad úsečkou AD. Zaoberáme sa ním preto, lebo chceme dokázať, že $|AC| = |AS|$ a chceme využiť pravý uhol ABD. Uhly CAM a BSD sú rovnaké. Chceme využiť, že M je stred BC. Ťažnica delí trojuholník na dve časti s rovnakým obsahom, preto výšky CQ a BP v trojuholníkoch AMC a AMB sú zhodné. Potom aj trojuholníky SPB a AQC sú zhodné.

10. Dokazovaný vzťah si prepíšeme na rovnosť pomerov $BC/CD = EC/CB$. Stačí porátaním uhlov dokázať, že trojuholníky BCD a ECB sú podobné.

11. Pozri úlohu 1. Porátame niekoľko uhlov a všimneme si rovnobežnosť. Čo dokazujeme? Že os uhla CKD je spoločnou dotyčnicou tých dvoch kružníc.

14. Dve kružnice sú zhodné práve vtedy, keď ich spoločnú tetivu vidíme pod rovnakým uhlom z bodov na zodpovedajúcich oblúkoch týchto kružníc.

15. Nech K je obraz P podľa jednej zo strán a L nech je priesečník tejto strany s priamkou KP. Ako vieme využiť, že L je stred úsečky KP? Ako využijeme, že uhol pri bode L je pravý?

17. Jedna možnosť je porátať dĺžky; dokazované tvrdenie platí práve vtedy, keď $CL \cdot CM = CN \cdot CB$ (mocnosť bodu ku kružnici). Iný prístup spočíva v porátaní uhlov. Ako pomocou uhlov vyjadríme, že L leží na kružnici opísanej *štvorcu* $ABCD$? Vieme zistiť niektorý z uhlov, ktorý priamka MK zviera s priamkami MC či MA?

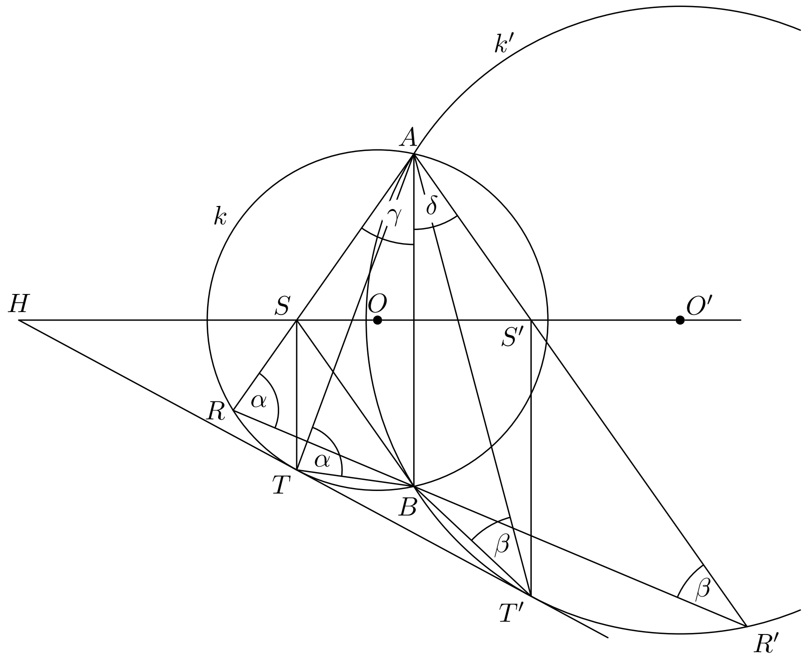
18. Päty výšok ležia na Tálesovej kružnici nad zodpovedajúcimi stranami trojuholníka, z toho vieme nejaké uhly. Uhly pri stredných priečkach vieme vyjadriť tiež. Treba si dokazované tvrdenie nejako sformulovať (napr. vezmem stred strany, tri päty výšok a ukážem, že ležia na kružnici, cyklickou zámenou dostanem dokazované tvrdenie), vyskúšajte rôzne formulácie, niektoré vedú k jednoduchšiemu dôkazu. Čo je obrazom vrchola v osovej súmernosti podľa strednej priečky a čo je jeho obrazom v stredovej súmernosti podľa stredu strednej priečky?

19. Porátame uhly, treba využiť tetivovosť štvoruholníkov. Dva pravé uhly nad úsečkou vedú k Tálesovej kružnici.

20. Kolmosť sa dá dokázať ľahko počítaním uhlov, aj keď situácia je neprehľadná (veľký obrázok!). Časť s Feuerbachovou kružnicou je ťažká, podobne ako dôkaz, že Feuerbachova kružnica sa dotýka kružnice vpísanej do trojuholníka a pripísaných kružníc.

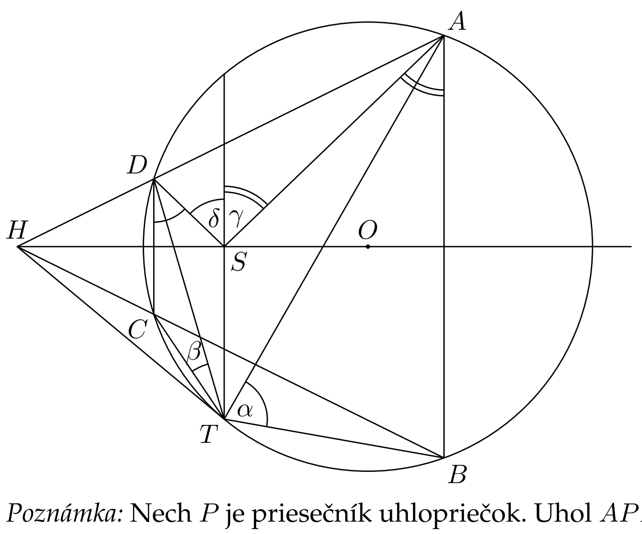
21. Vieme súčet $|CD| + |DA|$ reprezentovať jedinou úsečkou? Rovnoramenný trojuholník, ktorého jeden uhol je $60°$, je rovnostranný. Viete tam taký nájsť? Nebojte sa porátať potrebné vzdialenosti, ak sa vám nedarí úlohu riešiť iba cez uhly.

24. Prečítali sme si zadanie, nakreslili pekný obrázok a pochopili zadanie. Čo ďalej? Okrem iného sme zistili, že nezáleží na tom, na ktorú stranu kreslíme spoločnú dotyčnicu, pretože podstatné sú iba priemety S, S' dotykových bodov T, T' na os OO', podľa ktorej sú obe kružnice symetrické. Ak majú kružnice rovnaký polomer, body S, O (resp. S', O') splynú a tvrdenie platí, lebo uhly nad priemermi pri bode B sú pravé (čitateľ si nadšene nakreslí obrázok a overí to). Inak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že kružnica k má menší polomer ako kružnica k'.



Čo vlastne máme dokázať? Že body R, B, R' ležia na priamke. Vieme toto nejako prístupnejšie sformulovať? Áno: Uhol RBR' je priamy. Nech veľkosti uhlov ARB, $AR'B$, RAB, $R'AB$ sú po rade α, β, γ, δ. Prečo sme označili práve tieto uhly? Uhly γ a δ vyjadrujú polohu bodov S, S' vnútri jednotlivých kružníc a uhly α a β zase hovoria, pod akým uhlom vidíme zo zodpovedajúcich kružníc úsečku AB. Preto tieto uhly popisujú celú situáciu. Dokazované tvrdenie je ekvivalentné s tým, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Uhly vyjadrované pomocou α, β, γ, δ teda predstavujú akúsi spoločnú reč pre predpoklady a dokazované tvrdenie a stojí za pokus označiť ich práve takto.

Z tetivových štvoruholníkov $ABRT$ a $ABR'T'$ vieme vyjadriť $|\angle ATB| = \alpha$, $|\angle AT'B| = \beta$. Týmto sme sa zbavili bodov R, R', na dôkaz tvrdenia $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$ ich nepotrebujeme. Starajme sa radšej o to, ako si situáciu ďalej zjednodušiť. Máme tam stále veľa priamok a dve kružnice. Ale tie kružnice sú rovnoľahlé podľa bodu H, ktorý je priesečníkom osi OO' a spoločnej dotyčnice TT'. Obe spomenuté priamky sú v našej situácii podstatné, preto tento smer úvah vyzerá sľubne. Zobrazme v tejto rovnoľahlosti kružnicu k' na k. (Rovnako by sme to mohli naopak, ale potom by nám tam zostali čiarkované body, takto ostanú nečiarkované.) Bod B sa zobrazí do nejakého bodu C, bod A do bodu D, bod S' do bodu S, bod T' do T. Uhol $AT'B$ sa zobrazí do DTC a oba teda majú rovnakú veľkosť β. Kružnice k' sme sa zbavili, môžeme si nakresliť nový obrázok, kde už nebude.



Pozrieme sa na vec v novom svetle a zistíme niekoľko zaujímavostí. Priamky AB, CD, ST sú rovnobežné. Preto uhol ASD má veľkosť $\gamma + \delta$. Veľkosť uhla ADB je rovnaká ako veľkosť uhla ATB, teda α. Veľkosť uhla DAC je rovnaká ako veľkosť uhla DTC, teda β. Čo s bodom O? Skôr, než ho zahodíme, pozrime sa, či nie je na niečo užitočný. Priamka OT je kolmá na dotyčnicu HT. Navyše vieme zistiť veľkosť uhla AOD, je to $180° - \alpha - \beta$ (skúste to sami, nakreslite si k tomu nový obrázok a využite, že O je stred kružnice). Ale toto znamená veľa, dokazované tvrdenie platí práve vtedy, keď štvoruholník $ASOD$ je tetivový (potom ASD a AOD majú rovnakú veľkosť).

Poznámka: Nech P je priesečník uhlopriečok. Uhol APD má tiež veľkosť $180° - \alpha - \beta$. To by znamenalo, že body S, P, O ležia na kružnici nad tetivou AD. Tieto body však ležia na priamke. To znamená, že dva z nich by boli totožné. Keďže O a S aj O a P sú vo všeobecnosti rôzne, musia to byť body S a P. Z toho vyplýva toto tvrdenie: Nech k je kružnica a H bod mimo nej. Vezmime nejaké dve sečnice kružnice k prechádzajúce bodom H tak, aby vznikol rovnoramenný lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice. Potom priesečník uhlopriečok tohto lichobežníka je pevný bod nezávislý od voľby sečníc. (A my už vieme, že je to bod S z našej úlohy.)

Pokračovanie riešenia: Ostáva nám dokázať, že štvoruholník $ADSO$ je tetivový. (Nakreslite si ďalší obrázok, kde bude len tento štvoruholník a objekty, pomocou ktorých je určený, teda kružnica k, priamky HT a AD a body S a O.) To je ekvivalentné s tým, že $HD \cdot HA = HS \cdot HO$ (mocnosť bodu ku kružnici). Zrejme $HS \cdot HO = HT^2$ z Euklidovej vety v pravouhlom trojuholníku HTO a $HD \cdot HA = HT^2$ z mocnosti bodu H ku kružnici k. A sme hotoví. Ešte raz si prejdeme celý postup a overíme, že nepotrebujeme žiaden ďalší rozbor prípadov okrem toho v úvode.

V poslednej časti dôkazu sme akosi odskočili od počítania uhlov. Spravili sme to kvôli stručnosti a tiež pre ilustráciu využitia mocnosti bodu ku kružnici. Neznamená to však, že riešenie sa počítaním uhlov nedá dokončiť. Ale je to zdĺhavejšie a poznám len jediné takéto riešenie, ktoré využíva priesečník uhlopriečok a jeho vlastnosti spomínané v predošlej poznámke. Skúste takéto riešenie cez počítanie uhlov nájsť.

Tetivovosť štvoruholníka $ADSO$ sa dá dokázať aj inými spôsobmi. Sú však náročnejšie z pohľadu použitých poznatkov. Napríklad v kružnicovej inverzii so stredom O podľa kružnice k sa body H a S zobrazia na seba. Body A, D sú samodružné. Obrazom priamky prechádzajúcej bodmi H, D, A je kružnica, prechádzajúca obrazmi týchto bodov a navyše stredom O. Tými obrazmi sú body S, D, A a sme hotoví.

Iné riešenie: Obrázky sme si nakreslili, zadanie pochopili, uhly označili, ale nikam sme sa nedorátali. Nič to, stávajú sa aj horšie veci. Ale čo ďalej s príkladom? Všimnime si predošlé riešenie. Skladá sa z niekoľkých krokov. Preto nevidno súvis medzi predpokladmi a dokazovaným tvrdením, nevieme, ako začať, ani ktorým smerom sa uberať. Pomohlo by nám, keby sme vedeli úlohu rozložiť na niekoľko jednoduchších častí. To sa dá dosiahnuť tak, že nejaký medzikrok uhádneme. Ako? Narysujeme si veľký presný obrázok. A potom skúšame hádať, čo platí. Napríklad zostrojíme kružnicu cez tri body. Neleží na nej nejaký použiteľný štvrtý? Nie sú nejaké priamky rovnobežné? Možno je niečo vhodne symetrické? A tamten trojuholník, prečo vyzerá tak rovnoramenne? Nakreslíme si ďalší obrázok, odlišný od prvého. Zase ten trojuholník vyzerá rovnoramenne? Alebo pravouhlo? Ležia nejaké trojice bodov na priamke? Čo keby sme si tam dokreslili nejakú ďalšiu priamku? Kružnicu? Predĺžili úsečku? Takto získame niekoľko hypotéz, ktoré potom otestujeme na ďalšom presnom obrázku.

Keď uvedený postup vyskúšame na tejto úlohe, môžeme si všimnúť toto: Body R, B, R' ležia na priamke. A nielen to, táto priamka navyše prechádza bodom H (stred rovnoľahlosti kružníc). Priamky AS a BS' sú rovnobežné. Aj priamky AS' a BS sú rovnobežné. Trojuholník $SS'A$ je rovnoramenný. Štvoruholník $ASBS'$ je kosoštvorec. Štvoruholník $RSOB$ je tetivový (aj ďalšie tri štvoruholníky tohto typu). Na ľubovoľnom z týchto pozorovaní už vieme vybudovať riešenie.

Budeme používať rovnaké označenie ako v predošlom riešení. Nech AR a BS' sú rovnobežné. Z tejto rovnobežnosti vyplýva, že tieto priamky sú rovnoľahlé podľa bodu H v rovnoľahlosti, ktorá zobrazí kružnicu k na kružnicu k'. (Pretože bod S' je obrazom S.) V tejto rovnoľahlosti sa R zobrazí na B, preto body R, B, H ležia na priamke. Priamky BR, AS' sú tiež rovnobežné (lebo situácia je symetrická podľa osi OO'), preto aj body R', B, H ležia na priamke. Zostáva dokázať rovnobežnosť priamok AR a BS'. Keďže bod B je obrazom bodu A v osovej súmernosti podľa osi OO', je to ekvivalentné s rovnoramennosťou trojuholníka $SS'A$ (poriadne to uvážte). Toto sa dá dokázať výpočtom využívajúcim podobnosť trojuholníkov a Pytagorovu vetu pre množstvo pravouhlých trojuholníkov na obrázku. Existuje však elegantné geometrické zdôvodnenie. Priamka AB je chordálou kružníc k a k', preto pretína úsek TT' na spoločnej dotyčnici v jeho strede M (z mocnosti bodu M k daným kružniciam máme $MT^2 = MA \cdot MB = MT'^2$). Keď si to kolmo premietneme na priamku OO', tak priesečník priamky AB s OO' je stredom úsečky SS'. Hotovo.

2. Ako používať tento text?

Planimetria sa u nás vyučuje dosť obmedzene. Najmä vzhľadom na bežné planimetrické úlohy, ktoré sa vyskytujú v matematických súťažiach. Hlavný problém spočíva v nedostatku samostatnej práce žiakov pri riešení úloh. Táto samostatná činnosť je obmedzená len na štandardné úlohy, žiaci sa nestretnú s úlohami vyžadujúcimi tvorivý prístup a čosi viac, než naučené poznatky (istú výnimku predstavujú matematické gymnáziá). Túto medzeru pokladám za vhodné vyplniť; dobrou pomôckou môže byť aj tento materiál. Je určený najmä pre stredoškolákov, niet však dôvod, prečo by jednoduchšie časti nemohli byť použité už na základnej škole. Napríklad na matematickom krúžku.

Materiál v texte obsiahnutý postačí na desiatky hodín práce, aj vzhľadom k ťažkým úlohám uvedeným na konci. Nie je problém zohnať dostatok ďalších úloh, stačí si pozrieť archívy korešpondenčných seminárov alebo ročenky MO. Zvládnutie počítania uhlov patrí medzi základné zručnosti využívané v matematických súťažiach. Geometria je pre mnoho detí ťažká a neprístupná, pretože v škole sa často iba transmisívne vyučujú poznatky bez hlbšieho porozumenia (namiesto toho, aby sa učilo, ako riešiť problémy). Žiaci neveľmi rozumejú preberaným vetám z planimetrie a netušia, na čo sú dobré, ani sa nikdy k ich využitiu nedostanú. Pritom rátanie úloh z planimetrie vedie k dobrým pracovným návykom: musíme mať prehľad, čo robíme, nie len tak čumieť do papiera a označovať uhly, ktoré nevieme zrátať, novými premennými. Písanie riešenia a podrobného postupu je taktiež užitočné: argumenty v dôkaze musia na seba nadväzovať, riešenie má byť zrozumiteľné a prehľadné. Preto je dôležité, aby žiak dostal spätnú väzbu, aby bol upozornený na chyby, ktoré pri písaní riešenia robí.

ľahšie úlohy je možné riešiť so žiakmi priamo na hodine, nechať ich pracovať, sledovať, ako im práca ide, zastaviť sa pri jednotlivcoch a pomôcť im pri riešení vhodnými otázkami. Tieto otázky by mali byť všeobecné, napríklad „Čo dokazujeme?“, „Nedá sa to preformulovať inak?“, „Využívame všetky predpoklady zo zadania? Platí tvrdenie aj bez niektorého z nich? Alebo vieme nájsť protipríklad?“. Na druhej strane existuje aj nevhodná pomoc: „Kde môžeš použiť Pytagorovu vetu?“ Takáto otázka nevysvetľuje, ako učiteľ prišiel na to, že treba použiť Pytagorovu vetu, preto žiakovi nič do budúcnosti nedáva. Navyše ak žiak Pytagorovu vetu pozná a nedokázal ju použiť celý čas, čo ráta úlohu, tak ju najskôr nebude vedieť použiť ani teraz, takže aj tak sme mu takouto otázkou nepomohli.

Dôležité je dbať na to, aby deti pri riešení postupovali aktívne a cieľavedome. Mali by stále vedieť, čo robia: kreslím obrázok, pretože predošlý je primalý; rysujem presný obrázok, lebo chcem overiť hypotézu, že body A, B, C ležia na priamke; dokazujem, že tento trojuholník je rovnoramenný; ešte nerozumiem úplne zadaniu, tak sa ho snažím pochopiť; myslím si, že tieto dva predpoklady nemôžu platiť naraz, preto sa snažím nájsť trojuholník, kde platia, alebo dokázať, že neexistuje; vyjadrujem veľkosť tohto uhla pomocou uhlov trojuholníka ABC; hľadám, či sa v situácii nevyskytuje nejaký tetivový štvoruholník; ...

Je užitočné, ak žiaci riešenia aspoň niekoľkých úloh skúsia vysvetliť spolužiakom a iné zase napísať na papier tak, aby ich pochopili aj spolužiaci — často sa ukáže, že žiaci nedokážu dostatočne jasne a plynule vysvetľovať vlastné myšlienky. Matematika je na získanie týchto schopností veľmi vhodná, nuž prečo ju nevyužit?

Spolupráca pri planimetrii nemá veľký zmysel, najmä nie pri jednoduchých úlohách. Pri ťažkých však rôzne pohľady na problém umožňujú lepší vhľad do situácie. Máme viacero hypotéz, kamarát môže poukázať na chybu v mojej úvahe (ktorú by som sám našiel možno až po pár hodinách). Navyše riešiť niečo vo dvojici aj zvyšuje chuť rátať — nenechám v tom kamaráta samého, dvaja zvládneme viac, ...

V úvode tohto textu je niekoľko praktických rád. Cieľom je, aby sa dostali tieto osvedčené veci deťom do krvi. To ťažko pôjde proste tak, že im ich povieme. Napríklad väčšinou si ľudia kreslia primalé obrázky. Ale aby si človek začal kresliť veľké obrázky, najprv musí mať skúsenosť s malými, musí pochopiť, že sa tam naozaj nezmestí to, čo tam potrebuje mať. Preto tieto rady ponúkame deťom popri tom, ako rátajú, vo vhodnej chvíli. Napríklad: Vidíme, že žiak už označil 4 uhly rôznymi písmenami a nikam sa nedostal. Namieste je otázka, či potrebuje tieto štyri písmená, či sa nedá niektoré nedá vyjadriť pomocou ostatných. A kam smeruje jeho snaha — má zmysel počítať uhly? Na riešenie úloh deti potrebujú dostatok času, preto najvhodnejšie je rozdeliť si to na viac pokračovaní, ako seminár, ako súčasť hodín matematiky alebo ako náplň matematického krúžku.

Úvodné tri príklady vyriešené v texte sa bežne učia na strednej škole, avšak často ich prezentujeme nepripraveným žiakom — pri vete o obvodovom uhle napríklad žiaci nerozumejú dostatočne ekvivalencii a jej významu a použitiu. Preto je dobré si tieto poznatky zopakovať, aj s dôkazmi a s vysvetlením, ako sa dá na tieto dôkazy prísť. (Preto som tieto príklady rozpísal tak podrobne.) V príklade 4 dokážeme vetu o úsekovom uhle, s ktorou sa žiaci stretávajú prvýkrát až v matematickej olympiáde (kategória B, z nej je vybratá úloha 1). Príklad 5 je krásnym príkladom chybného dôkazu, založeného na nesprávnom obrázku. Poukazuje aj na význam diskusie — úvah o poradí bodov na priamkach či o polrovinách, v ktorých bod môže či nemôže ležať.

Medzi bežné chyby patrí aj „dôkaz kruhom“ — pri dôkaze nechtiac a nevedomky využijeme čosi ekvivalentné s dokazovaným tvrdením, napríklad kolinearitu troch bodov, ktorú odpozorujeme z obrázka. Takto sa nám podarí oklamať seba a často aj opravovateľa úlohy.

Úloha 2 ukazuje dôležitosť sformulovania dokazovaného tvrdenia. Navyše v nej dokázané tvrdenie je faktom bežne využívaným pri riešení ďalších úloh. Tento príklad naozaj netreba vynechať. Príklad 6 ukazuje metódu práce „odzadu“: bod P popíšeme dokazovanou vlastnosťou a ukážeme, že takto definovaný bod spĺňa všetky predpoklady zo zadania a je jediný. Toto sa používa často, preto netreba tento príklad vynechať.

Úlohy 4 až 7 sú jednoduché a stačí priamo počítať uhly s využitím súčtu uhlov v trojuholníku či známych vlastností tetivových štvoruholníkov. (Prečo je súčet uhlov v trojuholníku rovný priamemu uhlu? Koľko vašich žiakov to vie?) Úlohy 9 – 11 sú už ťažšie a riešenie pozostáva z niekoľkých krokov, preto je vhodná pomoc žiakom pri ich riešení.

Ďalšie úlohy sú väčšinou zoradené po skupinách podobných či súvisiacich (12–14, 15–16, 18–20). Preto je možné vyriešiť jednu úlohu so žiakmi na hodine a ostatné podobné im nechať na samostatnú prácu. Upozorňujem, že úlohy od 19 vyššie sú dosť ťažké a nedá sa čakať, že si s nimi poradí veľa žiakov. Tieto úlohy dosahujú (priam až presahujú) úroveň úloh v celoštátnom kole MO kategórie A. Všimnite si riešenie úlohy 24. Je tam pekne rozpísané, ako sa dá vyriešiť ťažká viackroková úloha. Pri jej riešení som nakreslil aspoň 20 obrázkov a riešil som ju vyše troch hodín — to je primeraný čas na jej vyriešenie.